§ 3 Lineare Funktionale – Hahn–Banach Theorem

Motivation:

1. Momentprobleme.

2. Prinzip: Untersuche Eigenschaften von Banachraum X via Eigenschaften von X'.

3.1. Hausdorff Momentenproblem

Gegeben $a_n \in\subset \mathbb{R}$, $a_n \geq 0$, finde (positives) Borel Maß μ auf $[0,1]$ mit

$$\int x^n \, \mathrm{d}\mu(x) = a_n.$$

Verallgemeinerung:

3.2. Problem [Allgemeines Momentenproblem].
Sei X normierter Vektorraum und seien $x_n \in X$ linear unabhängig und $a_n \in \mathbb{K}$ gegeben. Finde $\varphi \in X'$ mit $\varphi(x_n) = a_n$.
Idee: Definiere $\varphi'(x_n) := a_n$ auf $\operatorname{lin}\{x_1, x_2, \dots\}$ und setze φ' fort.

3.3. Theorem [Hahn–Banach, algebraische Version].
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, Y Unterraum von X und $p : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die

(a) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $\alpha \geq 0$, $x \in X$, *(positiv homogen)*

(b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $x, y \in X$, *(subadditiv)*

erfüllt. Sei ferner $f : Y \to \mathbb{R}$ linear mit $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in Y$. Dann existiert eine lineare Abbildung $F : X \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = f(x)$ für alle $x \in Y$ und $F(x) \leq p(x)$ für alle $x \in X$.

3.4. Lemma [Zorn]. Sei $(\mathcal{M}, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, so dass jede total geordnete Teilmenge $\mathcal{N}$ eine obere Schranke besitzt. Dann besitzt $\mathcal{M}$ ein maximales Element in $\mathcal{M}$.

Beweis vom Theorem 3.3 Betrachte

$$\mathcal{M} := \{(Z, g) : Y \subseteq Z \subseteq X \text{ Unterraum},\ g : Z \to \mathbb{R} \text{ linear},\ \ g = f \text{ auf } Y,\ g \leq p \text{ auf } Z\}.$$

Sei $(Z, g) \in \mathcal{M}$, $Z \neq X$ und $x_0 \in X \setminus Z$. Setze $Z_0 := \operatorname{lin}\{Z, x_0\}$ und $g_0(z + \alpha x_0) := g(z) + c\alpha$, wobei c noch so zu bestimmen ist, dass $(Z_0, g_0) \in \mathcal{M}$ gilt. Es ist nur zu zeigen, dass $g_0 \leq p$ auf Z_0 für ein c gilt, d.h. $g(z) + c\alpha \leq p(z + \alpha x_0)$ für alle $z \in Z$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Der Fall $\alpha = 0$ ist trivial, also nehmen wir $\alpha \neq 0$ an. Die Konstante c muss folgendes erfüllen:

$$\begin{aligned} c &\leq \frac{p(z + \alpha x_0) - g(z)}{\alpha} = p(z/\alpha + x_0) - g(z/\alpha), \quad \text{falls } \alpha > 0 \\ c &\geq \frac{p(z + \alpha x_0) - g(z)}{\alpha} = g(-z/\alpha) - p(-z/\alpha - x_0), \quad \text{falls } \alpha < 0. \end{aligned}$$

Es ist also c zu finden mit

$$\sup_{z \in Z} (g(z) - p(z - x_0)) \leq c \leq \inf_{z' \in Z} (p(z' + x_0) - g(z')).$$

Dies ist möglich, da für alle $z, z' \in Z$

$$g(z') + g(z) = g(z' + z) \leq p(z' + z) = p(z' - x_0 + x_0 + z) \leq p(z' - x_0) + p(x_0 + z) \text{ gilt.}$$

Das heißt, wir können jedes $(Z, g) \in \mathcal{M}$, $Z \neq X$ fortsetzen. Die Menge $\mathcal{M}$ ist geordnet durch die Relation $(Z', g') \leq (Z, g)$ falls $Z' \subseteq Z$ und $g' = g$ auf Z'. Für ein maximales Element (Z, g) muss $Z = X$ gelten. Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ total geordnet. Setze $Z' = \bigcup_{(Z,g)\in\mathcal{N}} Z$ und $g'(x) = g(x)$ falls $x \in Z$ und $(Z, g) \in \mathcal{N}$. Die Abbildung g' ist wohldefiniert und $(Z', g') \in \mathcal{M}$ ist eine obere Schranke von $\mathcal{N}$. Die Anwendung des Zornschen Lemmas vollendet den Beweis. ∎

3.5. Bemerkung. Parameter c ist nicht eindeutig, also ist F auch nicht eindeutig.

3.6. Lemma. Sei X ein komplexer Vektorraum.

a) Sei $\varphi : X \to \mathbb{C}$ linear und setze $\varphi_{re}(x) := \mathrm{Re}\ \varphi(x)$. Dann ist φ_{re} ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional, für die $\varphi(x) = \varphi_{re}(x) - i\varphi_{re}(ix)$ für alle $x \in X$ gilt .

b) Ist $\varphi : X \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional, so definiert $\widetilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - i\varphi(ix)$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional.

c) Sei $p : X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm. Dann gilt

$$\Big(|\varphi(x)| \leq p(x) \quad \text{für jedes } x \in X\Big) \quad \Longleftrightarrow \Big(|\varphi_{re}(x)| \leq p(x) \quad \text{für jedes } x \in X\Big)$$

d) Es gilt $\|\varphi\| = \|\varphi_{re}\|$.

Beweis. a), b) Rechnen.

c) Es gilt $|\varphi_{re}(x)| \leq |\varphi(x)|$, und somit gilt "$\Rightarrow$". Sei $x \in X$ und sei $\varphi(x) = r\lambda$, wobei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $|\lambda| = 1$, $r \geq 0$. Es gilt

$$|\varphi(x)| = r = \mathrm{Re}\ (\overline{\lambda}\varphi(x)) = \mathrm{Re}\ \varphi(\overline{\lambda}x) = \varphi_{re}(\overline{\lambda}x) \leq p(\overline{\lambda}x) = p(x).$$

d) klar aus c) ∎

3.7. Satz [Hahn–Banach, Fortsetzungsversion]. Sei X ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$, Y Unterraum. Dann existiert zu jedem stetigen Funktional $y' \in Y'$ ein stetiges Funktional $x' \in X'$ mit

$$x' = y' \text{ auf } Y \text{ und } \|x'\|_{X'} \leq \|y'\|_{Y'}.$$

Beweis. *Der Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*:* Setze $p(x) := \|y'\|_{Y'}\|x\|_X$ für $x \in X$. Dann gilt $p(y) \geq y'(y)$ für jedes $y \in Y$. Nach dem algebraischen Hahn–Banach Theorem existiert ein Funktional $x' : X \to \mathbb{R}$ mit $x' \leq p$ und $x' = y'$ auf Y. Daraus folgt $\|x'\| = \|y'\|$ (und somit ist x' auch stetig).

Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*:* Folgt aus Lemma 3.6. ∎

3.8. Korollar. Sei X normierter Vektorraum.

(a) $x \in X \Longrightarrow$ es existiert $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(x) = \|x\|$.

(b) $\|x\| = \sup\limits_{\substack{\varphi \in X' \\ \|\varphi\| \leq 1}} |\varphi(x)|$ für alle $x \in X$.

(c) Sei Y ein abgeschlossener Unterraum von X, $x \in X \setminus Y \Longrightarrow$ es existiert $\varphi \in X'$ mit $\varphi|_Y = 0$ und $\varphi(x) \neq 0$.

(d) Sei $Y \subseteq X$ Unterraum. Dann ist Y dicht in $X \Longleftrightarrow$ Für $\varphi \in X'$ mit $\varphi|_Y = 0$ gilt $\varphi = 0$.

Beweis. (a) Setze $Y = \operatorname{lin}\{x\}$, $y'(\lambda x) = \lambda \|x\|$ und wende Satz 3.7 an.

(b) Folgt aus (a).

(c) Sei $q : X \to X/Y$ die Quotientenabbildung, dann gilt $q(y) = 0$ für $y \in Y$ und $q(x) \neq 0$. Nach (b) existiert $\Psi \in (X/Y)'$ mit $\Psi(q(x)) \neq 0$. Setze $\varphi = \Psi \circ q$.

(d) $\Leftarrow$: Folgt aus (c).
$\Rightarrow$: Sei $\varphi \in X'$ mit $\varphi|_Y = 0$. Dann ist $\ker \varphi$ dicht und abgeschlossen (denn φ stetig) in X, also $\varphi = 0$. ∎

3.9. Satz [Helley]. Sei X normierter Vektorraum, $x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ linear unabhängig und $a_n \in \mathbb{K}$. Es existiert $\varphi \in X'$ mit $\varphi(x_n) = a_n$ genau dann, wenn

$$\text{für alle } \alpha_1, \dots, \alpha_m \quad \Big|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i\Big| \leq c \Big\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\Big\| \qquad \text{mit nur von } a_i \text{ abhängiger Konstante } c.$$

Beweis. *Notwendigkeit:* Sei $\varphi \in X'$ mit den gewünschten Eigenschaften.

$$\Big|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i\Big| = \Big|\varphi\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\Big)\Big| \leq \|\varphi\| \cdot \Big\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\Big\|.$$

Die Bedingung ist hinreichend: Folge der Idee vom Anfang. Setze $Y := \operatorname{lin}\{x_1, x_2, \dots\}$, definiere $\varphi'(x_n) := a_n$ und linear auf Y. Dann ist φ' stetig auf Y nach Voraussetzung. Verwende Hahn-Banach. ∎

3.10. Definition und Satz.

a) Eine Menge $M \subseteq X$ heißt konvex, falls für jedes $0 \leq \lambda \leq 1$ und $x, y \in M$ gilt $\lambda x + (1 - \lambda) y \in M$.

b) Ist M konvex, und $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ eine Konvexkombination von $x_i \in M$, d.h., $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_i \lambda_i = 1$, dann gilt auch $y \in M$.

c) Sind M, N konvex so ist $M \cap N$ auch konvex.

d) Für $A \subseteq X$ heißt die Menge

$$\operatorname{conv} A := \bigcap_{\substack{A \subseteq M \\ M \text{ konvex}}} M \quad \text{die \textit{konvexe Hülle} von } A.$$

Die konvexe Hülle ist die kleinste konvexe Menge, die A enthält.

3.11. Definition. Es sei X ein Vektorraum und $M \subseteq X$. Dann heißt $p_M : X \to [0, +\infty]$

$$p_M(x) := \inf\{\lambda > 0 : \ x \in \lambda M\}$$

das *Minkowskifunktional* (von M). Weiter heißt M *absorbierend*, falls $p_M(x) < +\infty$ für alle $x \in X$.

3.12. Beispiel. Sei X ein normierter Vektorraum und $M = B_X(0,1)$. Dann $p_M(x) = \|x\|$.

3.13. Bemerkung. Sei X ein normierter Vektorraum, $U \subseteq X$ konvex mit $0 \in \operatorname{int}(U)$.

(a) $B_X(0,\varepsilon) \subseteq U$, also $p_U(x) \leq \frac{\|x\|}{\varepsilon}$.

(b) p_U ist sublinear und positiv homogen.

(c) Ist U offen, dann gilt $U = p_U^{-1}([0,1))$.

Beweis. (a) klar.

(b) $p_U(\lambda x) = \lambda p_U(x)$ ($\lambda > 0$) ist klar.
Zu $x, y \in X$ und $\varepsilon > 0$ wähle $\lambda, \mu > 0$ mit $x \in \lambda U$, $y \in \mu U$ und $\lambda \leq p_U(x) + \varepsilon$, $\mu \leq p_U(y) + \varepsilon$, dann gilt

$$U \ni \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu} = \frac{x+y}{\mu+\lambda}.$$

$\Longrightarrow p_U(x+y) \leq \lambda + \mu \leq p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon.$

(c) $\subset$: Sei $0 \neq u \in U$. Dann existiert $B(u,\varepsilon) \subset U$, d.h. $(1 + \varepsilon/2\|u\|) \subset U$. Somit folgt $p_U(x) < 1$.
$\supset$: Sei $x \in p_U^{-1}([0,1))$ mit $p_U(x) = \lambda < 1$. Da U konvex ist und $0 \in U$, folgt aus $x \in U$ $\lambda x \in U$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Nach Voraussetzung gilt $x/(\lambda+\varepsilon) \in U$ mit $\lambda + \varepsilon < 1$ und somit $\frac{\lambda+\varepsilon}{\lambda+\varepsilon} x = x \in U$.

∎

3.14. Satz [Trennungssatz]. Sei $M \subseteq X$ konvex und abgeschlossen und $x \notin M$. Dann existiert $\varphi \in X'$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} \varphi(y) < c < \operatorname{Re} \varphi(x)$ für alle $y \in M$.

Beweis. Wir beweisen nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. O.B.d.A sei $0 \in M$ (Sei $m \in M$ und betrachte $M - m$ und $x - m$). Ersetze M durch $U = \overline{M + B(0,r)}$, wobei $r < \operatorname{dist}(x_0, M)$. Dann ist U auch konvex, abgeschlossen, und $0 \in \operatorname{int}(U)$, also U ist absorbierend. Außerdem gilt $p_U(x) \leq 1$ für $x \in U$ und $p_U(x_0) > 1$. Definiere $f(\alpha x_0) := \alpha p(x_0)$, ein lineares Funktional auf $\operatorname{lin}\{x_0\}$. Sei φ eine Fortsetzung von f nach dem Satz von Hahn–Banach 3.3. Dann gilt $\varphi \leq p \leq 1$ auf U und $\varphi(x_0) = f(x_0) = p_U(x_0) > 1$. Da $B(0,r) \subseteq U$ und $\varphi(x) \leq p(x) \leq 1$, gilt $\varphi(x) \leq p(x) \leq \|x\|/r$, d.h. $\varphi \in \ X'$. ∎

3.15. Satz. Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ offene konvexe Mengen in einem normierten Vektorraum mit $A \cap B = \emptyset$. Dann existiert ein $\varphi \in X'$ mit $\operatorname{Re} \varphi(x) < \operatorname{Re} \varphi(y)$ für alle $x \in A$ und $y \in B$.

3.16. Satz. Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ abgeschlossene konvexe Mengen in einem normierten Vektorraum mit $A \cap B = \emptyset$. Ferner sei eine der Beiden kompakt. Dann existiert ein $\varphi \in X'$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{Re} \varphi(x) < c < \operatorname{Re} \varphi(y)$ für alle $x \in A$ und $y \in B$.