# § 2 Lineare Operatoren

Im Folgenden seien $X, Y, Z$ stets normierte Räumen über dem selben Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

**2.1. Definition.**

(a) Eine Abbildung $T : X \to Y$ heißt *linear*, falls

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \qquad \forall x, y \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

(b) Ist $T$ linear, so heißt

$$\begin{aligned} \ker T &:= \{x \in X : Tx = 0\} \quad \text{der } \textit{Kern} \text{ von } T \\ \operatorname{im} T &:= \{y \in Y : \exists x \in X,\ y = Tx\} \quad \text{das } \textit{Bild} \text{ von } T \end{aligned}$$

(c) Lineare Abbildungen heißen (lineare) *Operatoren*.

**2.2. Satz.** Sei $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Äquivalent sind

(a) $T$ ist stetig;

(b) $T$ ist stetig in 0;

(c) $T$ ist *beschränkt*, d.h. $\exists\, M \geq 0$ mit $\|Tx\| \leq M\|x\|$ für alle $x \in X$;

(d) $T$ ist gleichmäßig stetig.

**Beweis.** Die Implikationen (a) $\Rightarrow$ (b) und (d) $\Rightarrow$ (a) sind trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c): Stetigkeit heißt insbesondere, dass ein $\delta > 0$ existiert mit $TB_X(0, \delta) \subseteq B_Y(0, 1)$, also gilt $\|Tx\|_Y \leq 1$ für jedes $x \in B_X(0, \delta)$. Aus der Homogenität folgt $\|Tx\|_Y \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_X$ für alle $x \in X$.

(c) $\Rightarrow$ (d): Sei $x \in X$. Nach Voraussetzung gilt $\|Tx - Ty\|_Y \leq M\|x - y\|_X$. Ist $\|x - y\|_X \leq \varepsilon/M$, folgt $\|Tx - Ty\|_Y \leq \varepsilon$, also die gleichmäßige Stetigkeit. ∎

**2.3. Definition.** Sei $T : X \to Y$ beschränkt (also stetig). Setze

$$\|T\| := \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|\ \forall x \in X\}.$$

**2.4. Bemerkung.** Die folgende Aussagen sind aus den Definitionen leicht nachweisbar.

(a) $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.

(b) $\|T\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$.

(c) Bezeichnung: $\mathscr{L}(X, Y) := \{T : X \to Y,\ \text{linear und stetig}\}$, $\mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X, X)$.
Mit den Operationen $(S + T)x := Sx + Tx$ und $(\alpha T)x := \alpha \cdot Tx$ ist $\mathscr{L}(X, Y)$ ein Vektorraum.

**2.5. Beispiel.**

(a) Ein isometrischer Isomorphismus $J : X \to Y$ ist stetig, und es gelten $\ker J = \{0\}$, $\operatorname{im} J = Y$ gelten.

(b) Sei $X$ normierter Vektorraum, $E \subseteq X$ abgeschlossener Unterraum. Dann ist $q : X \to X/E$ stetig mit $\ker q = E$ und $\operatorname{im} q = X/E$.

(c) Falls $X$ endlich-dimensional und $T : X \to Y$ linear ist, folgt sofort $T \in \mathscr{L}(X, Y)$.

**2.6. Satz.** Seien $X, Y$ normierte Vektorräume und $Y$ vollständig, $D \subseteq X$ ein dichter Unterraum und $T : D \to Y$ ein beschränkter linearer Operator. Dann gilt: $T$ hat eine eindeutige stetige Fortsetzung auf $X$.

**Beweis.** Übung. ∎

**2.7. Satz.**

(a) $\|T\|$ ist eine Norm auf $\mathscr{L}(X, Y)$, die so genannte *Operatornorm*.

(b) Ist $Y$ ein Banachraum, dann ist $\mathscr{L}(X, Y)$ auch ein Banachraum.

(c) Sind $T \in \mathscr{L}(X, Y)$, $S \in \mathscr{L}(Y, Z)$, so gilt $ST \in \mathscr{L}(X, Z)$ und $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

**Beweis.** (a) Die Homogenität und die Dreiecksungleichung sind klar. Sei $\|T\| = 0$. Dann $\|Tx\| \leq 0\|x\|$, also $\|Tx\| = 0$ und $T = 0$.

(b) Sei $(T_n) \subseteq \mathscr{L}(X, Y)$ eine Cauchyfolge. Sei $x \in X$. Es gilt dann $\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \varepsilon\|x\|$ falls $n, m \geq N$, wobei $N \in \mathbb{N}$ unabhängig von $x$ ist. Dies zeigt, dass $(T_n x) \subseteq Y$ eine Cauchyfolge ist, also nach Voraussetzung auch konvergent gegen ein $T(x)$. Es ist leicht zu zeigen, dass $x \mapsto T(x)$ linear ist.
Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|Tx - T_m x\| \leq \varepsilon\|x\| \quad \text{für alle } m \geq n_0.$$

Damit folgt $\|T - T_m\| \to 0$. Da $\|Tx\| \leq \|Tx - T_m x\| + \|T_m x\| \leq (1 + \|T_m\|)\|x\|$ für $m$ groß genug, gilt $T \in \mathscr{L}(X, Y)$.

(c) Sei $x \in X$. Es gilt $\|STx\| \leq \|S\| \cdot \|Tx\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$. ∎

**2.8. Bemerkung.**

(a) $\mathscr{L}(X)$ ist eine normierte Algebra, d.h. $T, S \in \mathscr{L}(X)$ impliziert $ST \in \mathscr{L}(X)$ und $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ *(submultiplikative Norm)*. Ist $X$ vollständig, dann ist $\mathscr{L}(X)$ eine Banachalgebra.

(b) Sei $X$ ein Banachraum und $(a_n) \subset \mathbb{K}$ mit $r := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. Für $T \in \mathscr{L}(X)$ mit $\|T\| < 1/r$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n.$$

Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so definert man $f(T)$ durch die Potenzreihe von $f$.

**Bemerkung:**

(a) Im obigen Beweis vom Satz 2.7 haben wir auch das Folgende gesehen. Ist $\|T_n - T\| \to 0$, so gilt auch $T_n \to T$ stark, d.h., $T_n x \to Tx$ für jedes $x \in X$.

(b) Die Umkehrung ist nicht wahr! Sei $X = C_0(\mathbb{R}_+)$, und $L : X \to X$ der Links-Shift: $(Lf)(t) = f(t + 1)$. Dann ist $\|L^n\| = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ , und $L^n \to 0$ stark.

(c) Sei $Y$ vollständig, $D \subseteq X$ dicht, $T_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ mit $\|T_n\| \leq M$. Nehme an, dass für jedes $x \in D$ $T_n x \to Tx$ und $\|T_n\| \leq M$ gilt, so folgt $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ und $T_n x \to Tx$ für jedes $x \in X$. Dies ist im Wesentlichen ein Korollar von Satz 2.6, denn $\|T_n x\| \leq M\|x\|$ und somit $\|Tx\| \leq M\|x\|$.

**Konvergenz linearer Operatoren**

**2.9. Definition.** Seien $T, T_n \in \mathscr{L}(X,Y)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) $T_n$ konvergiert gegen $T$ *stark*, falls $T_n x \to Tx$ für jedes $x \in X$ und für $n \to \infty$.

(b) $T_n$ konvergiert gegen $T$ *gleichmäßig*, falls $\|T_n - T\| \to 0$ für $n \to \infty$.

**Kriterien für starke Konvergenz sind sehr wichtig!** Ein Beispiel:

**2.10. Satz [Korovkin].** Seien $L_n : C[0,1] \to C[0,1]$ stetige, lineare Operatoren, die auch *positiv* sind, d.h. für $f \geq 0$ gilt $L_n f \geq 0$. Nehmen wir an, dass $L_n \mathbf{1} \to \mathbf{1}$, $L_n \mathrm{id} \to \mathrm{id}$ und $L_n \mathrm{id}^2 \to \mathrm{id}^2$ gleichmäßig auf $[0,1]$. Dann gilt $L_n f \to f$ für jedes $f \in C[0,1]$.

**Beweis.** Bemerke zunächst, dass $f, g \in C[0,1]$ und $f \leq g$ die Ungleichung $L_n f \leq L_n g$, $|L_n f| \leq L_n |f|$ impliziert. Daraus folgt $\|L_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|L_n \mathbf{1}\| \leq M \|f\|_\infty$.
Sei $f \in C[0,1]$, dann ist $f$ auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ so, dass $|x-y| \leq \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)|$ impliziert. Für beliebiges $x, y \in [0,1]$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq 2\|f\|_\infty$. Daher können wir

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{|x-y|^2}{\delta^2}, \quad \text{oder was gleich ist,} \quad |f - f(y)| \leq \varepsilon \mathbf{1} + 2\|f\|_\infty \frac{|\mathrm{id} - y\mathbf{1}|^2}{\delta^2}$$

schreiben. Daraus können wir das Folgende schliessen:

$$L_n|f - f(y)\mathbf{1}| \leq \varepsilon L_n \mathbf{1} + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} L_n(\mathrm{id} - y\mathbf{1})^2 = \varepsilon L_n \mathbf{1} + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\big(L_n \mathrm{id}^2 - 2y L_n \mathrm{id} + y^2 L_n \mathbf{1}\big).$$

Dies gilt für alle $y \in [0,1]$. Jetzt können wir die Funktionen in der obigen Ungleichung an einer festen Stelle $y \in [0,1]$ auswerten

$$\begin{aligned}(L_n|f - f(y)\mathbf{1}|)(y) &\leq \varepsilon (L_n \mathbf{1})(y) + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\big((L_n \mathrm{id}^2)(y) - 2y(L_n \mathrm{id})(y) + y^2 (L_n \mathbf{1})(y)\big) \\ &\to M\varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\underbrace{\big(\mathrm{id}^2(y) - 2y \mathrm{id}(y) + y^2 \mathbf{1}(y)\big)}_{=0} = M\varepsilon,\end{aligned}$$

wobei die gleichmäßige Konvergenz aus den Vorausstezungen folgt.
Nun schreiben wir

$$|(L_n f)(y) - f(y)| \leq |(L_n f)(y) - L_n f(y)\mathbf{1}| + |f(y)(L_n \mathbf{1})(y) - f(y)\mathbf{1}(y)| \leq M\varepsilon + |f(y)(L_n \mathbf{1})(y) - f(y)\mathbf{1}(y)|.$$

Hierbei konvergiert der zweite Term wieder nach Voraussetzung gegen 0, also $(L_n f)(y) - f(y)| \leq (M+1)\varepsilon$ für großes $n \in \mathbb{N}$ und für alle $y \in [0,1]$.

■

**2.11. Beispiel [Operatoren auf Räumen stetiger Funktionen].**

(a) Es sei $X = C([0,1])$, $T : f \mapsto f(0)$, $T : X \to \mathbb{K}$. Dann ist $T$ stetig mit $\|T\| = 1$.

(b) $X = C^1([0,1])$, $T : X \to \mathbb{K}$, $Tf := f(0) + f'(1)$. Dann gilt $\|T\| = 1$.

(c) $X = C^1([0,1])$, versehen mit äquivalenter Norm

$$|||f||| := \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\},$$

$T : X \to \mathbb{K}$, $Tf := f(0) + f'(1)$. Dann gilt: $\|T\| = 2$.

(d) $X = C([0,1])$, $T : X \to \mathbb{K}$

$$Tf := \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dann $\|T\| = 1$.

(e) Allgemeiner: $X = C([0,1])$, $T : X \to \mathbb{K}$, $g \in C([0,1])$

$$Tf := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dann $\|T\| = \int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t$.

**Beweis.** (a) Es gilt:

$$|Tf| = |f(0)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \|T\| \leq 1$$

Betrachte $f = \mathbf{1}$: $f(x) = 1$, $x \in [0,1]$, gilt $\|\mathbf{1}\| = 1 = T\mathbf{1} \Longrightarrow \|T\| = 1$.

(b) Es gilt:

$$|Tf| = |f(0) + f'(1)| \leq |f(0)| + |f'(1)| \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \|f\|_{C^1},$$

d.h $\|T\| \leq 1$. Andererseits gilt $\|\mathbf{1}\|_{C^1} = 1$ und $T\mathbf{1} = 1$, also folgt $\|T\| = 1$.

(c) Es gilt

$$|Tf| = |f(0) + f'(1)| \leq |f(0)| + |f'(1)| \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 2|||f|||,$$

d.h. $\|T\| \leq 2$. Andererseits betrachte $f(x) := (x - 1/2)^2 + 3/4$, dann $|||f||| = 1$ und $|Tf| = 2$

(d) s. (e)

(e) Es gilt

$$|Tf| = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Andererseits gilt für

$$f(x) = \operatorname{sign} g(x) := \begin{cases} 1 & g(x) \geq 0 \\ -1 & g(x) < 0 \end{cases}$$

$|Tf| = \int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t$. Im Allgemeinen gilt aber $f \notin C([0,1])$, also approximiere $f$ mit $(f_n) \subset C([0,1])$, $\|f_n\|_\infty = 1$ und $\int_0^1 |f_n - f| \to 0$ für $n \to \infty$. (Achtung: $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f$ ist nicht möglich!)

∎

**2.12. Beispiel [Operatoren auf Folgenräumen].**

(a) $T : c \to \mathbb{K}$, $Tx := \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann $\|T\| = 1$.

(b) Sei $c_{00} := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \neq 0$ für höchstens endlich viele $n\}$. Sei $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix. Setze

$$(Tx)_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j, \qquad i \in \mathbb{N},\ x \in c_{00}.$$

Für Anwendungen interessant: Matrizen, welche $\ell^1, \ell^2, \ell^\infty$ invariant lassen.

(i) $T \in \mathscr{L}(\ell^1) \iff \sup_{j\geq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty$

(ii) $T \in \mathscr{L}(\ell^\infty) \iff \sup_{i\geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty$

(iii) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q\right)^{p'/q} < +\infty \implies T \in \mathscr{L}(\ell^p, \ell^{p'})$ $(1/p + 1/q = 1)$

**2.13. Beispiel [Integraloperatoren].** Sei $I = [a, b]$ und $k : I \times I \to \mathbb{K}$ stetig. Für $f \in C(I)$ definiere

$$(Tf)(x) := \int_a^b k(x, y)f(y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in I.$$

Dann gilt $T \in \mathscr{L}(C(I))$ und $\|T\| = \sup_{x\in I} \int_a^b |k(x, y)|\,\mathrm{d}y$.
Folgerung: die Fredholmsche Integralgleichung

$$f(x) - \int_a^b k(x, y)f(y)\,\mathrm{d}y = g(x), \qquad x \in I$$

ist lösbar in $C(I)$, falls $g \in \operatorname{im}(Id - T)$, und es existiert höchstens eine Lösung in $C(I)$, falls $\ker(Id - T) = \{0\}$.

**Beweis.** Wegen der Stetigkeit existiert das Integral, es ist sogar $Tf \in C(I)$, denn

$$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq \int_a^b |k(x, z) - k(y, z)| \cdot |f(z)|\,\mathrm{d}z \leq \|f\|_\infty (b - a) \sup_{z\in I} |k(x, z) - k(y, z)|$$

Außerdem gilt

$$|(Tf)(x)| \leq \int_a^b |k(x, y)| \cdot |f(y)|\,\mathrm{d}z \leq \|f\|_\infty \int_a^b |k(x, y)|\,\mathrm{d}y \implies \qquad \|T\| \leq \sup_{x\in I} \int_a^b |k(x, y)|\,\mathrm{d}y.$$

Die Gleichheit $\|T\| = \sup_{x\in I} \int_a^b |k(x, y)|\,\mathrm{d}y$ folgt wie in Bspl. 2.11(e). ■

**2.14. Beispiel [Differenzialoperatoren].**

(a) Sei $X = C^1([0, 1])$ und

$$Tf := f'.$$

Dann

(i) $T : (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist nicht stetig.

(ii) $T : (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_{C^1}) \to (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist stetig.

(b) Im Allgemeinen: Ist $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Für jede Mutiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ setze $D_\alpha f := \frac{\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f$. Ferner sei $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, die Länge von $\alpha$.

$$Tf := \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \cdot D_\alpha f, \qquad f \in C^k(\overline{\Omega}),\ \text{mit } a_\alpha \in C(\overline{\Omega}).$$

Dann ist $T$ ein stetiger Operator von $C^k(\overline{\Omega})$ nach $C(\overline{\Omega})$. Wobei der Raum

$$C^k(\overline{\Omega}) := \{f : \overline{\Omega} \to \mathbb{K} : D_\alpha f \text{ exisitiert auf } \Omega \text{ und } D_\alpha f \in C(\overline{\Omega}) \text{ für jedes } |\alpha| \leq k\}$$

versehen mit $\quad \|f\|_{C^k} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D_\alpha f\|_\infty$

ein Banachraum ist.

**Spezielles Beispiel:** *Laplace Operator:* $\quad \Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

**Beweis.**

(a) (i) Für $f_n(t) := t^n$ gilt $\|f_n\|_\infty = 1$, aber $\|Tf_n\|_\infty = n$.

(ii) Es gilt: $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}$.

(b)

$$\|Tf\|_\infty = \| \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D_\alpha f\|_\infty \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|a_\alpha\|_\infty \|D_\alpha f\|_\infty \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|a_\alpha\|_\infty \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} \leq M \cdot \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})}.$$

■

**2.15. Definition.** Sei $X$ ein Vektorraum.

(a) Ein (linearer) Operator $T : X \to \mathbb{K}$ heißt (lineares) *Funktional*.

(b) Ist $X$ normiert, so heißt der Raum $\mathscr{L}(X, \mathbb{K})$ aller stetigen Funktionale auf $X$ der *Dualraum* von $X$ und wird mit $X'$ bezeichnet. Der Raum $X'$ versehen mit

$$\|x'\| := \sup_{\|x\| \leq 1} |x'(x)|$$

ist ein Banachraum.

**2.16. Satz.** Sei $\varphi : X \to \mathbb{K}$ lineares Funktional, $\varphi \neq 0$. Dann gelten die folgende Aussagen:

a) $\ker \varphi$ 1-kodimensional

b) Ist $\varphi$ stetig, so ist $\ker \varphi$ abgeschlossen.

c) Ist $\varphi$ unstetig, so ist $\ker \varphi$ dicht in $X$.

d) $\varphi \in X'$ genau dann, wenn $\ker \varphi$ abgeschlossen ist.

**Beweis.** (a): Sei $x \in X$. Es gibt $y \in X$ mit $\varphi(y) = 1$, da $\varphi$ nicht 0 ist. Daher gilt $x = \underbrace{(x - \varphi(x)y)}_{\in \ker \varphi} + \varphi(x)y$.

Dies zeigt $X = \ker \varphi + \operatorname{lin}\{y\}$.

(b): $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ und $\{0\}$ ist in $\mathbb{K}$ abgeschlossen.

(c): Da $\varphi$ unstetig ist, gibt es $x_n \in X$ mit $x_n \to 0$ und $\varphi(x_n) = 1$. Sei $x \in X$ beliebig. Setze $y_n = x - \varphi(x)x_n$. Dann konvergiert $y_n$ gegen $x$ und gilt $y_n \in \ker \varphi$.

(d): Folgt aus (b) und (c). ■

**2.17. Bemerkung.** Die Existenz von *nichttrivialen* Funktionalen (d.h. nicht 0) ist nicht trivial!