§ 1 Normierte Vektorräume

Im Folgenden sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1. Definition. Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

(a) Eine Abbildung $p : X \to \mathbb{R}$ heißt *Halbnorm* auf X falls

(N1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für $x, y \in X$ *(Dreiecksungleichung)*

(N2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ für $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ *(Homogenität)*

gelten.

(b) Eine Halbnorm $\|\cdot\| \to \mathbb{R}$ heißt *Norm* auf X, falls zusätzlich

(N3) $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ *(Definitheit)*

gilt.

1.2. Beispiel. $\mathbb{K}^d$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $x = (x_1, \dots, x_d)$

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^d |x_i|^2\Big)^{1/2}$$

(N3) und (N2) sind klar. Zum Beweis von (N1) im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ betrachte die Funktion

$$p(\lambda) := \sum_{i=1}^d (x_i - \lambda y_i)^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^d x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^d y_i^2 = c + b\lambda + a\lambda^2.$$

Dann ist $p \geq 0$ ein Polynom zweiten Grades. Daher kann es die x-Achse in höchstens einem Punkt berühren, d.h. die Diskriminante $(b^2 - 4ac)$ ist negativ oder 0:

$$\begin{aligned} \Big(2\sum_{i=1}^d x_i y_i\Big)^2 - 4\sum_{i=1}^d x_i^2 \sum_{i=1}^d y_i^2 &\leq \Big(2\sum_{i=1}^d x_i y_i\Big)^2 \leq 0 \\ \Longrightarrow \sum_{i=1}^d x_i y_i &\leq \Big(\sum_{i=1}^d x_i^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^d y_i^2\Big)^{1/2} = \|x\|_2 \|y\|_2. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung heißt *Cauchy–Bunyakovsky–Schwartzsche Ungleichung*. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2 &\leq \sum_{i=1}^d |x_i + y_i||x_i| + \sum_{i=1}^d |x_i + y_i||y_i| \\ &= \Big(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2 \sum_{i=1}^d |x_i|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2 \sum_{i=1}^d |y_i|^2\Big)^{1/2} \\ &= \Big(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2\Big)^{1/2} (\|x\|_2 + \|y\|_2), \end{aligned}$$

also folgt die Dreiecksungleichung.

1.3. Bemerkung.

(a) Sei p Halbnorm auf X. Dann gelten

(i) $p(x) \geq 0$ für alle $x \in X$ und $p(0) = 0$.

(ii) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ für alle $x, y \in X$.

(b) Sei $\|\cdot\|$ Norm auf X. Dann definiert $d(x, y) := \|x - y\| \quad (x, y \in X)$ eine Metrik auf X.

Erinnerung: Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik* falls

a) $d(x, y) \geq 0$	c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
b) $d(x, y) = d(y, x)$	d) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

1.4. Definition und Satz. Sei X normierter Vektorraum.

(a) Die Menge $B(x, r) := \{y : \|y - x\| < r\}$ heißt *offene Kugel*.

(b) Eine Menge $G \subseteq X$ heißt *offen*, falls zu jedem $x \in G$ eine offene Kugel $B(x, r) \subseteq G$ existiert.

(c) Eine Menge $F \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, falls ihr Komplement $X \setminus F$ offen ist. Eine Menge $F \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn alle konvergenten Folgen ihren Grenzwert in F haben.

(d) Der *Abschluss* einer Menge $A \subseteq X$ ist der Schnitt aller abgeschlossenen Mengen die A enthalten. Dies wird mit $\overline{A}$ bezeichnet.

Definition:

(a) Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf X. Dann heißt das Paar $(X, \|\cdot\|)$ *normierter (Vektor)Raum*.

(b) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum (oder (X, d) ein metrischer Raum). Eine Folge $(x_n) \subseteq X$ heißt *Cauchyfolge*, falls für alle $\varepsilon > 0$ es ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$ (oder $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$) für alle $n, m \geq N$ gilt.

(c) Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt *konvergent* gegen x, falls $\|x - x_n\| \to 0$ (oder $d(x, x_n) \to 0$).

(d) Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert, heißt *vollständig*. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*.

1.5. Bemerkung.

(a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $E \subseteq X$ ein Unterraum. Der Raum E ist vollständig genau dann, wenn E abgeschlossen ist.

(b) Eine Cauchyfolge ist immer beschränkt.

(c) Eine Cauchyfolge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, ist konvergent.

1.6. Bemerkung [Eigenschaften normierter Räume]. Sei X ein normierter Raum. Dann gilt:

(a) $(x_n), (y_n) \subset X$ mit $x_n \to x$, $y_n \to y \Longrightarrow x_n + y_n \to x + y$

(b) $(x_n) \subset X$, $(\alpha_n) \subset \mathbb{K}$ mit $x_n \to x$, $\alpha_n \to \alpha \Longrightarrow \alpha_n x_n \to \alpha x$

(c) $(x_n) \subset X$ mit $x_n \to x \Longrightarrow \|x_n\| \to \|x\|$

1.7. Beispiel.

(a) $\mathbb{R}^d$ versehen mit

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\Big)^{1/2} \text{ oder } \|x\|_\infty := \max_{1\le i\le d} |x_i|$$

ist ein Banachraum.

(b) **Räume beschränkter Folgen**
ℓ^∞: Raum aller beschränkten Folgen:

$$\ell^\infty := \Big\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\Big\}.$$

c: Raum aller konvergenten Folgen:

$$c := \Big\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \text{ ist konvergent}\Big\},$$

c_0: Raum aller Nullfolgen:

$$c_0 := \Big\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \to 0\Big\}$$

Dann gilt $c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty$. Versehen mit $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ sind alle Banachräume.

(c) **Räume stetiger Funktionen**
Sei $\emptyset \neq K$ eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^d$. Betrachte

$$C(K) := \{f : K \to \mathbb{K} \text{ stetig}\} \quad \text{versehen mit} \quad \|f\|_\infty := \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

Dann ist $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum. Analog definiert man $C(K, \mathbb{K}^d)$, der Raum von $\mathbb{K}^d$-wertigen, stetigen Funktionen. Die Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm heißt *gleichmäßige Konvergenz.*

(d) **Räume beschränkter/stetiger Funktionen**
Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine beliebige Borelmenge. Betrachte die folgende Vektorräume

$$\begin{aligned} F_b(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ beschränkt}\},\\ M_b(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ beschränkt und Borel messbar}\},\\ C_b(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ beschränkt und stetig}\},\\ BUC(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ beschränkt und gleichmäßig stetig}\},\\ C_c(\Omega) &:= \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ stetig und } \operatorname{supp} f \subseteq \Omega \text{ ist kompakt}\}. \end{aligned}$$

Es gilt $C_c(\Omega) \subseteq BUC(\Omega) \subseteq C_b(\Omega) \subseteq M_b(\Omega) \subseteq F_b(\Omega)$. Versehen mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|,$$

sind $BUC(\Omega)$, $C_b(\Omega)$, $M_b(\Omega)$ und $F_b(\Omega)$ Banachräume. $C_c(\Omega)$ ist vollständig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ genau dann wenn Ω kompakt ist. Die Vervollständigung (Abschluss) von $C_c(\Omega)$ wird mit $C_0(\Omega)$ bezeichnet und ist natürlich in $BUC(\Omega)$ enthalten.

(e) **Holomorphe Funktionen**
Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und betrachte den Raum

$$H^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ beschränkt und holomorph}\}.$$

Versehen mit der Supremumsnorm ist $H^\infty(\Omega)$ ein Banachraum, denn er ist ein abgeschlossener Unterraum von $C_b(\Omega)$.

(f) **Summierbare Folgen**
Sei $1 \le p < \infty$. Betrachte den Raum

$$\ell^p := \Big\{(a_n) : \ (a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty\Big\},$$

$$\text{und die Norm} \qquad \|(a_n)\|_p := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{1/p}.$$

Dann ist $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.

(g) Später: L^p Räume

(h) Später: Räume von Maßen

(i) **Funktionen beschränkter Variation**
Eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ hat *beschränkte Variation*, falls es ein M gibt, so dass für jedes System $0 = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n \le 1$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \le M.$$

Die kleinste Konstante M heißt die *totale Variation* der Funktion, man bezeichnet sie mit $V_0^1 f$. Es gilt

$$V_0^1 f = \sup\Big\{\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| : 0 = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n \le 1, \ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Die totale Variation von f auf $[0,x]$ wird durch V_0^x bezeichnet, und die Funktion $x \mapsto V_0^x f$ ist monoton steigend. Die Funktionen beschränkter Variation bilden einen Vektorraum $BV[0,1]$, und $f \mapsto V_0^1 f$ ist eine Halbnorm darauf. Mit einer kleiner Modifikation bekommt man sogar eine Norm: $\|f\|_{BV} := |f(0)| + V_0^1 f$, versehen mit der $BV[0,1]$ ist ein Banachraum.

Beweis. (a) ÜA.

(b) Der Fall ℓ^∞ ist ein ÜA.

Die Vektorräume c und c_0 sind abgeschlossen in ℓ^∞. Wir zeigen nur den Fall c_0. Sei $(a_n)^k \in c_0$, so dass $(a_n)^k \to (b_n) \in \ell^\infty$ für $k \to \infty$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} |b_n| \le |b_n - a_n^k| + |a_n^k| &\le \|(b_n) - (a_n)^k\|_\infty + |a_n^k| \\ &\le \varepsilon + |a_n^k|, \quad k \ge n_0, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Für festes $k \ge n_0$ und hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n^k| \le \varepsilon$. Also $|b_n| \le 2\varepsilon$ für $n \ge n_0$. Wir haben also $(b_n) \in c_0$ gezeigt.

(c) Klar: $\|\cdot\|$ ist eine Norm.
Beh.: $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig.
Sei $(f_n) \subseteq C(K)$ eine Cauchyfolge. Da $|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_\infty$, ist $(f_n(x)) \in \mathbb{K}$ eine Cauchyfolge, und daher ist die Folge $(f_n(x))$ konvergent. Bezeichne den Limes mit $g(x)$.
Beh.: $g \in C(K)$ und $\|f_n - g\|_\infty \to 0$.
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in K$ $|f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$. Lasse nun $n \to \infty$, und so $|g(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$ für alle $x \in K$ und $n \ge N$. Dies zeigt $f_n \overset{\|\cdot\|}{\to} g$, und daher muss auch g stetig auf K sein, denn der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist stetig.

(d) ohne Beweis (siehe (c)).

(e) siehe Funktionentheorie.

(f) Beweis im Falle $p = 1$ (der Fall $p \neq 1$ kommt später):
<u>Beh.</u>: $\|\cdot\|_1$ ist eine Norm.
Es gilt:

$$\begin{aligned}\|(a_n)+(b_n)\|_1 &\le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n| \le \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty}|b_n| \\ &= \|(a_n)\|_1 + \|(b_n)\|_1.\end{aligned}$$

Die anderen Eigenschaften einer Norm sind auch klar.
<u>Beh.</u>: $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ ist vollständig.
Sei $(a_n)^k \subseteq \ell^1$ eine Cauchyfolge. Es gilt $|a_n^k - a_n^m| \le \|(a_n)^k - (a_n)^m\|_1$, d.h. $(a_n^k) \in \mathbb{K}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Daher ist sie auch konvergent: $a_n^k \to b_n$ für $k \to \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\|(a_n)^k - (a_n)^m\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n^k - a_n^m| \le \varepsilon \qquad \text{für alle } k, m \ge N.$$

Da $(a_n)^k \subseteq \ell^1$ eine Cauchy-Folge ist, existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit $\|(a_n)^k\|_1 \le K$, $n \in \mathbb{N}$. Sei $l \in \mathbb{N}$ beliebig und wähle m groß genug, so dass

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{l}|b_n| &\le \sum_{n=1}^{l}|b_n - a_n^m| + \sum_{n=1}^{l}|a_n^m| \le \sum_{n=1}^{l}|b_n - a_n^m| + \|(a_n)^m\|_1 \\ &\le \sum_{n=1}^{l}|b_n - a_n^m| + K \le \varepsilon + K.\end{aligned}$$

Also $(b_n) \in \ell^1$.
Zu $\varepsilon > 0$ wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $\|(a_n)^k - (a_n)^m\|_1 \le \varepsilon/2$, $m \ge k$. Dann gilt für $l \in \mathbb{N}$ groß genug (abhängig von k)

$$\sum_{n=l}^{\infty}|a_n^m| \le \sum_{n=l}^{\infty}|a_n^k - a_n^m| + \sum_{n=l}^{\infty}|a_n^k| \le \varepsilon, \quad m \ge k.$$

Sei nun $l \in \mathbb{N}$ noch größer, damit auch $\sum_{n=l}^{\infty}|b_n| \le \varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|b_n - a_n^m| &= \sum_{n=1}^{l-1}|b_n - a_n^m| + \sum_{n=l}^{\infty}|b_n - a_n^m| \\ &\le \sum_{n=1}^{l-1}|b_n - a_n^m| + \sum_{n=l}^{\infty}|b_n| + \sum_{n=l}^{\infty}|a_n^m| \\ &\le \sum_{n=1}^{l-1}|b_n - a_n^m| + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Da $a_1^m, a_2^m, \ldots, a_{l-1}^m \to b_1, b_2 \ldots, b_{l-1}$ folgt $\|(b_n) - (a_n)^m\|_1 \to 0$ für $m \to \infty$.

■

1.8. Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf einem Vektorraum X heißen *äquivalent*, falls $c, C > 0$ existieren mit

$$c\|x\| \le |||x||| \le C\|x\| \quad \text{für alle } x \in X.$$

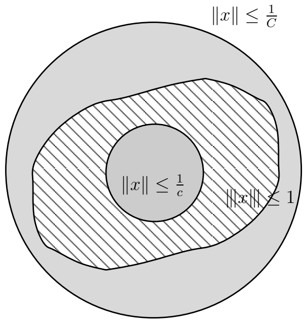
1.9. Bemerkung.

(a) Seien $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ zwei Normen auf X. Dann sind äquivalent

(i) $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ sind äquivalente Normen

(ii) Eine Folge $(x_n) \subset X$ konvergiert gegen x bezüglich $\|\cdot\| \iff (x_n)$ konvergiert gegen x bezüglich $|||\cdot|||$

(iii) Eine Folge $(x_n) \subset X$ ist Nullfolge bezüglich $\|\cdot\| \iff (x_n)$ ist Nullfolge bezüglich $|||\cdot|||$



(b) Geometrische Bedeutung vom Definition 1.8:

$$\{x \in X:\ \|x\| \le \tfrac{1}{C}\} \subseteq \{x \in X:\ |||x||| \le 1\} \subseteq \{x \in X:\ \|x\| \le \tfrac{1}{c}\}.$$

Topologische Bedeutung: die zwei Normen bestimmen dieselbe Topologie, d.h., die offenen Mengen sind die selben für beide Normen.

(c) Auf $X := C([0,1])$ sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ nicht äquivalent.

(d) Ist $(\|\cdot\|)$ vollständig und $\|\cdot\|$ mit $|||\cdot|||$ äquivalent, so ist $(X, |||\cdot|||)$ auch vollständig.

(e) Sei $\alpha > 0$ und

$$\|f\|_\alpha := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|e^{-\alpha t} \quad f \in C([0,1]).$$

Auf $C([0,1])$ sind $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_\alpha$ äquivalent.

Beweis. (a) (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sind klar.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Annahme: es existiert kein $C > 0$ mit $|||x||| \le C\|x\|$ für alle $x \in X$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $x_n \in X$ mit $|||x_n||| \ge n\|x_n\|$. Sei $y_n := \frac{x_n}{n\|x_n\|}$. Dann konvergiert $y_n \overset{\|\cdot\|}{\to} 0$, aber $|||y_n||| \ge 1$: ein Widerspruch. Die Existenz von c beweist man analog.

(b) Klar.

(c) Sei $f_n(x) = x^n$. Dann gilt

$$\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

d.h $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$, aber $\|f_n\|_\infty = 1$.

(d) Klar.

■

1.10. Satz. Auf einem endlichdimensionalen Raum sind je zwei Normen äquivalent.

Beweis. Betrachte eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^d$, und sei $e_1, \dots, e_d$ die Standardbasis in $\mathbb{K}^d$. Wir zeigen, dass $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind. Für $x \in \mathbb{R}^d$ gilt $x = x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d$, und damit

$$\begin{aligned}\|x\| = \|x_1e_1 + \cdots + x_de_d\| &\le \|x_1e_1\| + \cdots + \|x_de_d\| = |x_1| \cdot \|e_1\| + \cdots + |x_d| \cdot \|e_d\| \\ &\overset{\text{C.S.-Ungl.}}{\le} (\|e_1\|^2 + \cdots + \|e_d\|^2)^{1/2}(|x_1|^2 + \cdots + |x_d|^2)^{1/2} = M\|x\|_2,\end{aligned}$$

mit $M := (\|e_1\|^2 + \cdots + \|e_d\|^2)^{1/2}$. D.h. $\|x\| \le M\|x\|_2$. Dies zeigt insbesondere, dass $x \mapsto \|x\|$ eine stetige Funktion auf (dem euklidischen) $\mathbb{K}^d$ ist. Die Einheitspäre $S \subseteq \mathbb{K}^d$ ist kompakt (siehe Analysis I-II.), und $\|\cdot\|$ ist eine stetige positive Funktion darauf. D.h. $\|\cdot\|$ hat ein positives Minimum m auf S. Sei $x \in \mathbb{K}^d$ beliebig, dann $\frac{x}{\|x\|_2} \in S$ und damit $m \le \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|$, d.h. $m\|x\|_2 \le \|x\|$. ■

1.11. Satz. Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum. Dann ist X vollständig $\Longleftrightarrow$ jede absolut konvergente Reihe konvergiert, d.h. für alle $(x_n) \subseteq X$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ existiert ein $x \in X$ mit $\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} x_n - x \right\| = 0$.

Beweis. "$\Rightarrow$": Da $\left(\sum_{n=1}^{m} x_n\right)_m$ eine Cauchyfolge ist, folgt die Behauptung.

"$\Leftarrow$": Sei $(x_n) \subseteq X$ eine Cauchyfolge. Zu $\varepsilon_k := 2^{-k}$ wähle $N_k \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}$ falls $n, m \geq N_k$. Dann existiert es eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $y_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. Dann $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| < +\infty$. Nach Voraussetzung existiert es $y \in X$ mit

$$\Big\| y - \sum_{k=1}^{m} y_k \Big\| = \|y - (x_{n_{m+1}} - x_{n_1})\| \to 0 \quad \text{als } m \to \infty.$$

Eine Teilfolge von (x_n) konvergiert und (x_n) ist Cauchyfolge, also konvergiert auch (x_n). ■

Elementare Konstruktionen – Summen und Quotienten

1.12. Definition und Satz.

(a) X und Y heißen *isomorph*, falls eine lineare Bijektion $J : X \to Y$ existiert.

(b) Seien $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, |||\cdot|||)$ *isometrisch isomorphe* normierte Vektorräume, d.h. es existiert ein linearer (algebraischer) Isomorphismus J zwischen X und Y, welcher auch eine Isometrie ist: $|||Jx||| = \|x\|$. Dann ist X vollständig genau dann, wenn Y vollständig ist.

(c) Seien X, Y normierte Vektorräume und $1 \leq p \leq \infty$. Dann definiert

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} \Big(\|x\|^p + \|y\|^p\Big)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \max\{\|x\|, \|y\|\} & p = \infty. \end{cases}$$

eine Norm auf $X \times Y$. Das Paar $(X \times Y, \|(\cdot,\cdot)\|_p)$ wird mit $X \underset{p}{\oplus} Y$ bezeichnet.

i) Die Normen $\|(\cdot,\cdot)\|_p$ sind alle äquivalent auf $X \times Y$.

ii) Sind X, Y vollständig, folgt die Vollständigkeit von $X \underset{p}{\oplus} Y$ auch.

(d) Sei X normierter Vektorraum und $A \subseteq X$. Der *Abstand* von einem $x \in X$ zu A ist definiert durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{\|x - y\| : \, y \in A\}.$$

$\operatorname{dist}(x, A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{A}$ (siehe Definition 1.4 (d)).

(e) Sei X normierter Vektorraum, $E \subseteq X$ abgeschlossener Unterraum. Betrachte den Quotientenraum X/E. Sei $\hat{x} := x + E \in X/E$. Dann definiert $\|\hat{x}\| := \operatorname{dist}(x, E)$ eine Norm auf X/E.

Beweis. (a), (b) ÜA.
(d) Wohldefiniert: Sei $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$, also $x_1 = x_2 + y$ mit $y \in E$. Dann gilt $\operatorname{dist}(x_1, E) = \operatorname{dist}(x_2, E)$.

Definitheit: $\|\hat{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{dist}(x, E) = 0 \Longleftrightarrow x \in \overline{E} = E \Longrightarrow \hat{x} = 0$.
Homogenität: klar. Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|\hat{x} + \hat{y}\| &= \inf_{z \in E} \|x + y + z\| = \inf_{z_1, z_2 \in E} \|x + y + z_1 + z_2\| \leq \inf_{z_1, z_2 \in E} \|x + z_1\| + \|y + z_2\| \\ &= \inf_{z_1 \in E} \|x + z_1\| + \inf_{z_2 \in E} \|y + z_2\| = \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|. \end{aligned}$$

■

1.13. Beispiel.

(a) $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p) \underset{p}{\oplus} (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p) \simeq (\mathbb{R}^{d+m}, \|\cdot\|_p)$.

(b) $C([0,1]) \underset{\infty}{\oplus} C([0,1]) \simeq C([0,1], \mathbb{K}^2)$

(c) Es sei $a \leq \alpha < \beta \leq b$ und $E := \{f \in C([a,b]) :\ f(s) = 0 \text{ für alle } s \in [\alpha, \beta]\}$. E ist ein abgeschlossener Unterraum von $C([a,b])$. Der Quotient $C([a,b])/E$ ist isometrisch isomorph zu $C([\alpha,\beta])$.

1.14. Satz. Sei X Banachraum und E abgeschlossener Unterraum. Dann ist X/E ein Banachraum.

Beweis. Sei $x_n \in X$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|\hat{x}_n\| < +\infty$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen $\|x_n\| \leq \|\hat{x}_n\| + 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ und nach Voraussetzung existiert $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Daher

$$\Big\|\hat{x} - \sum_{n=1}^{m} \hat{x}_n\Big\| = \Big\|\widehat{x - \sum_{n=1}^{m} x_n}\Big\| \leq \Big\|x - \sum_{n=1}^{m} x_n\Big\| \to 0 \quad \text{für } m \to \infty.$$

Die Behauptung folgt aus Satz 1.11. ∎

1.15. Definition. Ein metrischer Raum X heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge A besitzt. Hierbei heißt A *dicht* in X, falls für alle $\varepsilon > 0$ und alle $x \in X$ ein $a \in A$ existiert mit $d(a,x) \leq \varepsilon$.

1.16. Satz. Ist X ein separabler metrischer Raum, so ist jede Teilmenge $A \subseteq X$ auch separabel.

Beweis. Ohne. ∎

1.17. Beispiel.

(a) $X = C([0,1])$ versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ ist separabel.

(b) Sei $1 \leq p < \infty$, dann ist ℓ^p ist separabel, ℓ^∞ ist nicht separabel.

Beweis. (a) Approximationssatz von Weierstraß: die Polynome sind dicht in $C([0,1])$. Wähle Polynome mit rationalen Koeffizienten, um eine abzählbare Menge zu erhalten.

(b) ÜA.

∎

1.18. Definition. Sei X ein normierter Vektorraum, welcher auch eine Algebra über $\mathbb{K}$ ist, d.h. es ist eine assoziative Multiplikation zwischen den Elementen $a, b \in X$ definiert, so dass

a) $a, b \in X,\ \lambda \in K \Longrightarrow (\lambda a)b = \lambda(ab) = a(\lambda b)$

b) $a, b, c \in X \Longrightarrow (a+b)c = ac + bc,\ c(a+b) = ca + cb$

Ist $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ für alle $a, b \in X$, dann heißt X normierte Algebra. Ist ferner X vollständig, nennt man X *Banachalgebra*.

1.19. Beispiel. Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann ist $X = C(K)$ mit üblicher Multiplikation eine (kommutative) Banachalgebra.

1.20. Satz [Stone–Weierstraß]. Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Betrachte die Banachalgebra $C(K)$ sowie eine Teilalgebra $\mathscr{A} \subseteq C(K)$, so dass

(a) $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$; $\mathbf{1}$ ist die Konstante 1-Funktion.

(b) Für alle $x, y \in K$ $x \neq y$ existiert $f \in \mathscr{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$;

(c) $f \in \mathscr{A} \Longrightarrow \overline{f} \in \mathscr{A}$ (im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Dann ist $\mathscr{A}$ dicht in $C(K)$.

Zunächst beweisen wir die folgende, verbandtheoretische Version des Satzes:

1.21. Satz [Stone–Weierstraß, verbandtheoretische Version]. Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Betrachte die Banachalgebra $C(K)$ über $\mathbb{R}$ sowie einen Unterraum $\mathscr{L} \subseteq C(K)$, so dass

(a) $\mathbf{1} \in \mathscr{L}$;

(b) Für alle $x, y \in K$ $x \neq y$ existiert $f \in \mathscr{L}$ mit $f(x) \neq f(y)$;

(c) Ist $f, g \in \mathscr{L}$, dann gilt $\min(f, g) \in \mathscr{L}$. (d.h. $\mathscr{L}$ ist ein Verband)

Dann ist $\mathscr{L}$ dicht in $C(K)$.

Beweis. *Schritt 1.:* Bemerke, dass für $f, g \in \mathscr{L}$ gilt $\max(f, g) \in \mathscr{L}$, denn $\max(f, g) = -\min(-f, -g)$. Dies werden wir im Folgenden stillschweigend benutzen.
Schritt 2.: Für gegebene $x, y \in K$ und $a, b \in \mathbb{R}$ konstruieren wir $f_{x,y} \in \mathscr{L}$ mit $f_{x,y}(x) = a$ und $f_{x,y}(y) = b$ (hier sei $a = b$ falls $x = y$). Ist $x = y$ so ist die Konstruktion trivial. Sei $x \neq y$ und sei $f \in \mathscr{L}$ eine Funktion die x und y trennt. Durch Addition eines skalaren Vielfachen von $\mathbf{1}$ können wir annehmen, dass $f(x) < 0 < f(y)$ gilt. Wir setzen $f_{x,y} := a\frac{\min(f,0)}{f(x)} + b\frac{\max(f,0)}{f(y)}$. Dann ist $f_{x,y} \in \mathscr{L}$ und besitzt auch die gewünschte Eigenschaft.
Schritt 3.: Gegeben sei $x \in K$, $\varepsilon > 0$ und $h \in C(K)$. Wir konstruieren eine Funktion $f_x \in \mathscr{L}$, so dass $f_x(x) = h(x)$ und $f_x(y) > h(y) - \varepsilon$ für alle $y \in K$. Betrachte für jedes $y \in K$ die Funktion $f_{x,y}$ aus Schritt 2 mit $a = h(x)$ und $b = h(y)$. Definiere die offene Mengen

$$U_{x,y} := \{z : f_{x,y}(z) > h(z) - \varepsilon\}.$$

Dann gilt $y \in U_{x,y}$, und damit $K \subseteq \bigcup_{y \in K} U_{x,y}$ ist eine offene Überdeckung. Wegen Kompaktheit existieren $y_1, \dots, y_n \in K$, so dass $K = U_{x,y_1} \cup \dots \cup U_{x,y_n}$. Setze $f_x := \max(f_{y_1}, \dots, f_{y_n})$. Diese Funktion hat die gewünschte Eigenschaft, denn für $y \in K$ gilt $y \in U_{x,y_k}$ für ein $1 \leq k \leq n$, und damit gilt

$$f_x(y) \geq f_{x,y_k}(y) > h(y) - \varepsilon.$$

Schritt 4.: Sei $h \in C(K)$ beliebig und $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $x \in K$ betrachte die Funktionen f_x aus Schritt 3. Wir definieren die offene Mengen

$$U_x := \{z : f_x(z) < h(z) + \varepsilon\}.$$

Es gilt $x \in U_x$ und damit ist $K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x$ eine offene Überdeckung, die wegen Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung besitzt: $K \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m}$. Für die Funktion $f := \min(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$ gilt $f \in \mathscr{L}$ und

$$h(y) - \varepsilon < f(y) \leq f_{x_k}(y) < h(y) + \varepsilon,$$

fall $y \in U_{x_k}$. D.h. $\|h - f\|_\infty \leq \varepsilon$ und damit folgt die Behauptung. ■

Nun zur algebraischen Version des Satzes:

Beweis vom Satz 1.20 Es reicht nur den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zu beweisen, denn für allgemeines $f \in C(K)$ gilt $f = \operatorname{Re} f + i\operatorname{Im} f$, und damit reicht es $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ separat zu approximieren ($f, \overline{f} \in \mathscr{L} \Longrightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathscr{L}$). Wir zeigen, dass $\mathscr{L} := \overline{\mathscr{A}}$ die Bedingungen des Satzes 1.21 erfüllt.

Behauptung: Für $f \in \mathscr{L}$ gilt $|f| \in \mathscr{L}$.
OBdA können wir $\|f\|_\infty \leq 1$ annehmen. Es gilt $f^2 = f \cdot f \in \mathscr{L}$. Erinnerung: es gilt $(1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, wobei die Konvergenz absolut und gleichmässig auf $[-1,1]$ ist . Bemerke $\|f^2 - 1\|_\infty \leq 1$. Daher gilt

$$|f| = (f^2)^{1/2} = (1 + (f^2 - 1))^{1/2} = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N} c_k (f^2 - 1)^k,$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf K. Da die endlichen Summen hinter dem Limes zu $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{L}$ gehören, liegt ihr Grenzwert in $\mathscr{L} = \overline{\mathscr{A}}$. Für $f, g \in \mathscr{A}$ gilt also $\min(f, g) \in \mathscr{L}$. Denn $\min(f, g) = -\frac{1}{2}(|f - g| - f - g)$. Ist nur $f, g \in \mathscr{L}$, so gibt es $f_n, g_n \in \mathscr{A}$ mit $f_n \to f$ und $g_n \to g$. Damit gilt auch $\mathscr{L} \ni \min(f_n, g_n) \to \min(f, g)$, also $\min(f, g) \in \mathscr{L}$.
Wir sehen also, dass die Bedingungen unter 1.21 erfüllt sind, und daher ist $\mathscr{L}$ dicht in $C(K)$. Aber $\mathscr{L} = \overline{\mathscr{A}}$ ist gleichzeitig auch abgeschlossen, also $\mathscr{A}$ ist dicht in $C(K)$. ■