Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
17.–18. Januar 2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12. Übung zu Spektrum – Lösungsvorschlag

57.

a) M ist beschränkt genau dann, wenn $(m_n) \in \ell^\infty$, und es gilt $\|M\| = \|(m_n)\|_\infty$. Daraus folgt $\|M^k\| = \|(m_n)\|_\infty^k$ und somit $r(M) = \|(m_n)\|_\infty$. Es gilt $P\sigma(M) = \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$. Denn sei δ_n die übliche Folge, die nur in der n-ten Koordinate 1 und sonst 0 ist. Es gilt natürlich $M\delta_n = \lambda_n\delta_n$, also $\lambda_n \in \sigma(M)$. Ist aber $(\lambda - M)(x_n) = 0$, so gilt entweder $(x_n) = 0$ oder $m_{n_0} = \lambda$ für ein n_0. Somit gilt auch $P\sigma(M) = \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Wir zeigen $\sigma(M) = \overline{\{m_n : n \in \mathbb{N}\}} =: S$. Hier ist "$\supseteq$" klar, denn das Spektrum ist abgeschlossen. Sei jetzt $\lambda \notin S$. Dann ist der Multiplikator $N(x_n) := (x_n/(\lambda - m_n))$ beschränkt und die Inverse von $\lambda - M$. Also gilt "$\subseteq$" auch.

Falls $\lambda \neq m_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist $c_{00} \subseteq \operatorname{im}(\lambda - M)$, und somit ist $\operatorname{im}(\lambda - M)$ dicht in ℓ^2 (c_{00} ist dicht in ℓ^2). Dies zeigt $R\sigma(M) = \emptyset$.

Es gelten im Allgemeinen $P\sigma(T) \subseteq A\sigma(T)$ und $\sigma(T) = A\sigma(T) \cup R\sigma(T)$. In unserem Fall bedeutet dies, dass $A\sigma(T) = \overline{\{m_n : n \in \mathbb{N}\}} = \sigma(M)$ gilt.

b) Sei $\{a_1, a_2, \ldots,\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge in K. Nach Aufgabe a) hat der Multiplikator $M := M_{(a_n)}$ das Spektrum $\overline{\{a_1, a_2, \ldots\}} = K$.

c) Betrachte den Multiplikator $M := M_{\lambda_n}$. Nach Teil b) ist $\sigma(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\} \cup \{0\}$. Die Aussage über die Multiplizität folgt aus Aufgabe a).

58.

a) $\lambda - T$ ist definiert auf einem abgeschlossenen Unterraum (überall definiert) und stetig, damit ist es auch abgeschlossen.

b) Falls $\lambda \notin P\sigma(T)$, so existiert $(\lambda - T)^{-1} : \operatorname{im}(\lambda - T) \to X$. Da $\lambda - T$ abgeschlossen ist, ist $\operatorname{gr}(\lambda - T) \subseteq X \times X$ ein abgeschlossener Unterraum. Es gilt

$$\operatorname{gr}(\lambda - T)^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \operatorname{gr}(\lambda - T)\} \subseteq X \times X.$$

Somit ist $\operatorname{gr}(\lambda - T)^{-1}$ genau dann abgeschlossen, wenn $\operatorname{gr}(\lambda - T)$ abgeschlossen ist.

c) Aus b) wissen wir, dass $(\lambda - T)^{-1} : \operatorname{im}(\lambda - T) \to X$ abgeschlossen ist. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist $(\lambda - T)^{-1}$ genau dann stetig, falls es auf einem abgeschlossenen Unterraum definiert ist. Dies zeigt die Aussage.

d) Nach c) ist $(\lambda - T)^{-1} : \operatorname{im}(\lambda - T) \to X$ unstetig genau dann, wenn $\lambda \in A\sigma(T)$. Aber $(\lambda - T)^{-1} : \operatorname{im}(\lambda - T) :\to X$ ist genau dann unstetig, wenn eine Nullfolge $(\lambda - A)x_n \to 0$ existiert mit $x_n = (\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)x_n \not\to 0$. Daraus folgt die Aussage.

59.

a) Nach Hahn–Banach ist $\operatorname{im}(\lambda - T)$ nicht dicht genau dann, wenn ein $0 \neq \varphi \in X'$ existiert mit $\varphi|_{\operatorname{im}(\lambda - T)} = 0$. Die letzte Aussage aber ist zu $\lambda \in P\sigma(T')$ äquivalent. So folgt die Behauptung.

b) Sei $\lambda \in A\sigma(T)$, d.h. es existiert eine Folge $(x_n) \subseteq X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|\lambda x_n - Tx_n\| \to 0$. Es gilt $\big||\lambda|\|x_n\| - \|Tx_n\|\big| \leq \|\lambda x_n - Tx_n\| \to 0$, also $1 = \|x_n\| = \|Tx_n\| \to \|\lambda\|$, d.h. $|\lambda| = 1$.

c) Für $\lambda \in \rho(T)$ gilt $(\lambda - T)R(\lambda, T) = R(\lambda, T)(\lambda - T) = I$ und somit $R(\lambda, T)^*(\lambda - T)^* = (\lambda - T)^* R(\lambda, T)^* = I$, also $R(\lambda, T)^*(\overline{\lambda} - T^*) = (\overline{\lambda} - T^*)R(\lambda, T)^* = I$. D.h. $R(\lambda, T)^* = (\overline{\lambda} - T^*)^{-1}$. Damit ist $\rho(T) \subseteq \overline{\rho(T^*)}$ bewiesen. Aus $T^{**} = T$ folgt $\rho(T) = \rho(T^{**}) \supseteq \overline{\rho(T^*)}$.

60. Vorbemerkung: Es gilt $\lambda^2 - T^2 = (\lambda + T)(\lambda - T)$. Ist also $\lambda - T$ nicht injektiv, so ist auch $\lambda^2 - T^2$ nicht injektiv. Ist umgekehrt $\lambda^2 - T^2$ nicht injektiv, so muss einer der Operatoren $\lambda - T$, $\lambda + T$ nicht injektiv sein, also gilt $\lambda \in P\sigma(T)$ oder $-\lambda \in P\sigma(T)$.

Analog: sind beide Operatoren $\lambda - T$ und $\lambda + T$ surjektiv, so ist $\lambda^2 - T^2$ auch surjektiv, und umgekehrt.

a) Folgt aus dem obigen Argument.
b) Folgt aus dem obigen Argument.
c) Sei $\lambda \in A\sigma(T)$, d.h. es existiert eine Folge $(x_n) \in X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|\lambda x_n - Tx_n\| \to 0$. Daher ist $\|\lambda^2 x_n - T^2 x_n\| \leq \|\lambda + T\| \|\lambda x_n - Tx_n\| \to 0$, also $\lambda^2 \in A\sigma(T^2)$. Umgekehrt seien jetzt $\lambda^2 \in A\sigma(T^2)$ und $(x_n) \subseteq X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|\lambda^2 x_n - T^2 x_n\| \to 0$. Gilt $\|\lambda x_n - Tx_n\| \to 0$, so sind wir fertig. Also sei (x_{n_k}) eine Teilfolge mit $\|\lambda x_{n_k} - Tx_{n_k}\| \geq \varepsilon > 0$. Wir setzen $y_k := (\lambda x_{n_k} - Tx_{n_k})/\|\lambda x_{n_k} - Tx_{n_k}\|$. Dann gilt $\|y_k\| = 1$ und $\|\lambda y_k + Ty_k\| = \|\lambda^2 x_{n_k} - T^2 x_{n_k}\| / \|\lambda x_{n_k} - Tx_{n_k}\| \to 0$. Dies gibt $-\lambda \in A\sigma(T)$.

61.

- Es gilt $\|R\| = \|L\| = 1$, also $r(T) \leq 1$ für $T \in \{R, L\}$. Es gilt $\lambda(x_n) - L(x_n) = (\lambda x_n - x_{n+1})$, also bedeutet $(\lambda - L)(x_n) = 0$, dass $\lambda x_n - x_{n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also $x_{n+1} = \lambda^{n-1} x_1$. Für $x_1 \neq 0$ liegt dies in ℓ^2 nur dann, wenn $|\lambda| < 1$. Also $P\sigma(L) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$.
- Es gilt $\lambda(x_n) - R(x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \lambda x_3 - x_2, \cdots)$, also bedeutet $(\lambda - R)(x_n) = 0$ für $\lambda \neq 0$, dass $x_1 = 0$ und so induktiv $x_n = 0$. Ist $\lambda = 0$, folgt sofort auch $(x_n) = 0$. Dies zeigt $P\sigma(R) = \emptyset$.
- Wir sehen $\{\lambda : |\lambda| < 1\} \subseteq \sigma(L) \subseteq \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$. Also folgt $\sigma(L) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$, denn das Spektrum ist abgeschlossen. So folgt auch $\sigma(R) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$.
- Aus Aufgabe 59 a) folgt $R\sigma(R) = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$ und $R\sigma(L) = \emptyset$. Der Operator R ist eine Isometrie, also liefert Aufgabe 59 b), dass $A\sigma(R) \subseteq \{\lambda : |\lambda| = 1\}$, damit ist auch $A\sigma(R) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$.
- Da $\{\lambda : |\lambda| \leq 1\} = \sigma(L) = R\sigma(L) \cup A\sigma(L) = \emptyset \cup A\sigma(L)$, folgt $A\sigma(L) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$.