Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
25.–26. Oktober 2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Übung zu Banachräumen und zu dem Satz von Stone–Weierstraß - Lösungsvorschlag

6.

7.

8.

9.

10.

a) Sei $f, g \in \mathrm{Lip}([0,1])$.

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{\mathrm{Lip}} &= |f(0)+g(0)| + \sup_{x\neq y}\left|\tfrac{f(x)+g(x)-f(y)-g(y)}{x-y}\right| \\ &\leq |f(0)| + |g(0)| + \sup_{x\neq y}\left|\tfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| + \sup_{x\neq y}\left|\tfrac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| = \\ &= \|f\|_{\mathrm{Lip}} + \|g\|_{\mathrm{Lip}}.\end{aligned}$$

Die anderen Eigenschaften einer Norm sind noch leichter zu zeigen. Sei $(f_n) \subseteq \mathrm{Lip}([0,1])$ eine Cauchyfolge und $x \in [0,1]$. Insbesondere gilt $\|f_n\|_{\mathrm{Lip}} \leq K < \infty$. Es gilt

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(0) - f_m(0))| + |f_n(0) - f_m(0)| \leq \\ &\leq \big(\|f_n - f_m\|_{\mathrm{Lip}} - |f_n(0) - f_m(0)|\big)x + |f_n(0) - f_m(0)| \\ &\leq \|f_n - f_m\|_{\mathrm{Lip}} \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

falls n, m groß genug sind. Daher $f_n(x) \to g(x)$, denn $f_n(x)$ ist eine Cauchyfolge, also konvergent. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\|f_n - f_m\|_{\mathrm{Lip}} \leq \varepsilon$, also

$$\begin{aligned}|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))| &\leq \big(\|f_n - f_m\|_{\mathrm{Lip}} - |f_n(0) - f_m(0)|\big)|x-y| \\ &\leq \big(\varepsilon - |f_n(0) - f_m(0)|\big)|x-y|,\end{aligned}$$

für alle $x, y \in [0,1]$, $n, m \geq N$. Sei $x, y, \in [0,1]$ und lasse $n \to \infty$. Dann erhalten wir

$$\big|(g(x) - f_m(x)) - (g(y) - f_m(y))\big| \leq \big(\varepsilon - |g(0) - f_m(0)|\big)|x-y|,$$

$$\text{das heißt} \quad \frac{|(g(x) - f_m(x)) - (g(y) - f_m(y))|}{|x-y|} + |g(0) - f_m(0)| \leq \varepsilon,$$

falls $m \geq N$. Dies zeigt $f_m \overset{\mathrm{Lip}}{\to} g$. Lasse in der obigen Ungleichung m gegen ∞ gehen, um $g \in \mathrm{Lip}([0,1])$ zu erhalten.