Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
10.–11. Januar 2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11. Übung zu Kategoriensatz und Spektrum – Lösungsvorschlag

52. Sei $\dim X = \infty$ und $e_n \in X$ für $n \in \mathbb{N}$. Setze $X_n = \operatorname{lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dann ist $\dim X_n < \infty$, also ist X_n abgeschlossen. Dies zeigt, dass $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ nicht gelten kann, da X_n nirgends dicht ist (denn es hat leeres Inneres). Also gibt es in X keine abzählbare Basis.

53.

a) Sei $i : X \to X''$ die kanonische Einbettung. Dann ist $\|i(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in X$. Es reicht also zu zeigen, dass $\{i(x) : x \in M\} \subseteq X''$ beschränkt ist. Dazu verwendet man das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit auf X'.

b) Folgt aus a), denn für eine schwach konvergente Folge $(x_n) \subseteq X$ und $\varphi \in X'$ hat man, dass $\varphi(x_n)$ beschränkt ist.

c) Verwende das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

d) Sei $i : Y \to Y''$ die kanonische Einbettung. Dann $i(Tx)(y') = y'(Tx)$. Es gilt dann $\|Tx\| = \|i(Tx)\|$. Ferner $\sup_{\|x\|\le 1} \|i(Tx)(y')\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|(Sy')(x)\| \le \|Sy'\|$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt $\sup_{\|x\|\le 1} \|i(Tx)\| < +\infty$, also $\sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| < +\infty$. Schließlich gilt $|(Sy')(x)| = |y'(Tx)| \le \|y'\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$, also $\|Sy'\| \le \|T\| \cdot \|y'\|$, d.h. S ist auch stetig.

54.

a) Klar ist $M_g \in \mathcal{L}(X)$. Die Abbildung Φ ist linear, denn z.B. $\Phi(f+g)h = M_{f+g}h = (f+g)h = fh + gh = M_f h + M_g h$. Ferner ist Φ eine Isometrie, denn $\|\Phi g\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \|gf\|_\infty \le \|g\|_\infty$, und $\|(\Phi g)\mathbf{1}\|_\infty = \|g\|_\infty$ (hier ist $\mathbf{1}$ die konstante 1 Funktion).

b) c) Das Spektrum von M_g ist $g([0,1])$, denn für $\lambda \notin g([0,1])$ gilt $1/(\lambda - g) \in C([0,1])$ ($g([0,1])$ ist kompakt!), und so ist $M_{1/(\lambda-g)} \in \mathcal{L}(X)$ die Inverse von $\lambda - M_g$.

c) Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gehört zu $P\sigma(M_g)$ genau dann, wenn $\{x \in [0,1] : g(x) = \lambda\}$ nicht leer ist.

55.

a) Sei $x_n \in X$ mit $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$. Dann $Tx_n \to Tx$ wegen Stetigkeit. Also ist $Tx = y$.

b) Trivial, denn A ist linear.

c) A ist abgeschlossen $\iff$ gr (A) ist abgeschlossen in $X \times Y$. $\Longrightarrow$: Sei $D \ni x_n \to x$ und $Ax_n \to y$. Dann $(x_n, Ax_n) \to (x, y)$, also ist $(x, y) \in$ gr (A), d.h. $y = Ax$. Die umgekehrte Implikation geht genauso.

d) Sei $\Phi : (D, \|\cdot\|_A) \to \operatorname{gr}(A) \supseteq X \oplus_1 Y$, $\Phi(x) := (x, Ax)$. Dann ist Φ ein isometrischer Isomorphismus und gr (A) ein Banachraum. Also ist auch D ein Banachraum.

e) Für $x \in D$ gilt $\|Ax\| \le \|x\| + \|Ax\|$.

56. Es gilt die Abschätzung $|(Vf)(x)| \le x\|f\|_\infty \|k\|_\infty$ für alle $f \in C([0,1])$. Somit gilt

$$|(V^2 f)(x)| \le \int_0^x |(Vf)(y)||k(x,y)|\,\mathrm{d}y \le \int_0^x y\|f\|_\infty \|k\|_\infty^2\,\mathrm{d}y \le \frac{x^2}{2}\|f\|_\infty \|k\|_\infty^2.$$

Induktiv beweist man

$$|(V^n f)(x)| \le \frac{x^n}{n!}\|f\|_\infty \|k\|_\infty^n,$$

und daher $\|V^n\|^{1/n} \le \frac{1}{(n!)^{1/n}}\|k\|_\infty$. Für $n \to \infty$ liefert dies $r(V) = 0$.