Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
24.–25. Januar 2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13. Übung zu Selbstadjungierten Operatoren – Lösungsvorschlag

62. Sei L der Linksshift auf ℓ^2. Dann $T = i\mathrm{Id} + M_{(1/n)}L$, wobei $M_{(1/n)}$ den Multiplikator mit $(1/n)$ bezeichnet. Daher erhalten wir $T^* = -i\mathrm{Id} + RM_{(1/n)}$, wobei R der Rechtsshift ist.
Der Adjungierte eines Multiplikators ist wieder ein Multiplikator, und alle Multiplikatoren kommutieren miteinander.

63.

a) T ist selbstadjungiert, also $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, und so gilt $i, -i \in \rho(T)$.
b) Es gilt $U_T U_T^* = (T+i)(T-i)^{-1}(T-i)^{-1*}(T+i)^* = (T+i)(T-i)^{-1}(T+i)^{-1}(T-i) = (T+i)(T+i)^{-1}(T-i)^{-1}(T-i) = \mathrm{Id}$. Genauso zeigt man $U_T^* U_T = \mathrm{Id}$.
c) Es gilt $U_T := (T - i + 2i)(T-i)^{-1} = \mathrm{Id} + 2i(T-i)^{-1}$. So sehen wir, dass $U_T - 1$ stetig invertierbar ist, d.h. $1 \in \rho(U_T)$. Ferner gilt $(U_T - 1)^{-1} = -i(T-i)/2$. Also gilt $-i(1+U_T)(1-U_T)^{-1} = i(U_T+1)(U_T-1)^{-1} = i\mathrm{Id} + 2i(U_T-1)^{-1} = i\mathrm{Id} + 2(T-i)/2 = T$.

64. Wir setzen $T_1 = (T+T^*)/2$, $T_2 = i(T^* - T)/2$. Dann sind T_1 und T_2 selbstadjungiert, denn es gilt $T_1^* = (T^* + T)/2 = T_1$ und $T_2^* = -i(T - T^*)/2 = T_2$. Ferner ist $T = T_1 + T_2$. Wenn $T = \tilde{T}_1 + i\tilde{T}_2$ mit $\tilde{T}_1$ und $\tilde{T}_2$ selbstadjungiert, dann gilt $\langle \tilde{T}_1 x, x\rangle + i\langle \tilde{T}_2 x, x\rangle = \langle(\tilde{T}_1 + i\tilde{T}_2)x, x\rangle = \langle (T_1 + iT_2)x, x\rangle = \langle T_1 x, x\rangle + i\langle T_2 x, x\rangle$. Da die quadratischen Formen reell sind, folgt $\langle \tilde{T}_1 x, x\rangle = \langle T_1 x, x\rangle$ und $\langle \tilde{T}_2 x, x\rangle = \langle T_2 x, x\rangle$. Wie in Aufgabe 47 (Polarisationsidentität) zeigt man, dass die Funktion $x \mapsto \langle Tx, x\rangle$ auch die Funktion $(x,y) \mapsto \langle Tx, y\rangle$ bestimmt, also folgt $\langle T_1 x, y\rangle = \langle \tilde{T}_1 x, y\rangle$, $\langle T_2 x, y\rangle = \langle \tilde{T}_2 x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$, und so $T_1 = \tilde{T}_1$ und $T_2 = \tilde{T}_2$.
Falls T_1 und T_2 kommutieren, folgt $TT^* = (T_1 + iT_2)(T_1 - iT_2) = T_1^2 - iT_1T_2 + iT_2T_1 - T_2^2 = T_1^2 - iT_2T_1 + iT_1T_2 - T_2^2 = (T_1 - iT_2)(T_1 + iT_2) = T^*T$. Umgekehrt sei T normal. Dann folgt analog zu obiger Argumentation $-iT_1T_2 + iT_2T_1 = -iT_2T_1 + iT_1T_2$, und daher $2iT_2T_1 = 2iT_1T_2$, also die Behauptung.

65.

a) T ist eine Isometrie $\iff \|Tx\| = \|x\| \iff \|Tx\|^2 = \|x\|^2 \iff \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle \iff \langle T^*Tx, x\rangle = \langle x, x\rangle$ (natürlich immer für alle $x \in H$). Dies ist ferner äquivalent zu $\langle T^*Tx, y\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$ (siehe Aufgabe 64), d.h. aber $T^*T = \mathrm{Id}$.
b) Ist T selbstadjungiert, so folgt $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$. Daher sieht man $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$. Ist umgekehrt die quadratische Form $\langle Tx, x\rangle$ reell, dann gilt $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \overline{\langle T^*x, x\rangle} = \langle T^*x, x\rangle$. Wie im Teil a) folgt daraus $\langle Tx, y\rangle = \langle T^*x, y\rangle$ für alle $x, y \in H$ also $T = T^*$.
c) Sei T unitär. Dann T ist invertierbar, insbesondere surjektiv. Nach Teil a) ist T auch eine Isometrie. Umgekehrt sei T eine surjektive Isometrie. Teil a) zeigt $T^*T = \mathrm{Id}$. Da T eine Isometrie ist, gilt $\ker(T) = \{0\}$. Also ist T stetig invertierbar, daher $T^* = T^{-1}$ und so $TT^* = \mathrm{Id}$.

66. Klar ist, dass $\mathcal{L}_{sa}(H)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. Sei T_n selbstadjungiert mit $T_n \to T$. Zu zeigen ist $T \in \mathcal{L}_{sa}(H)$. Die Konvergenz $\mathbb{R} \ni \langle T_n x, x\rangle \to \langle Tx, x\rangle$ zeigt, zusammen mit Aufgabe 65 b), dass T selbstadjungiert ist. Sei $S, T \in \mathcal{L}_{sa}(H)$ mit $S \le T$ und $T \le S$, d.h. $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ für alle $x \in H$. Dann folgt $S = T$ (siehe Aufgabe 64). Die Transitivität sowie die Reflexivität der Relation $\le$ sind trivial.

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Der Multiplikator $M_{(m_n)}$ mit $(m_n) \in \ell^\infty$ ist

- selbstadjungiert $\iff m_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- positiv $\iff m_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- unitär $\iff |m_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

67.

a) i) $\Rightarrow$ ii): Für $x \in H$ gilt $x - Px \in \ker P = (\operatorname{im} P)^\perp$, also $\langle Px, x\rangle = \langle Px, x - Px + Px\rangle = \langle Px, x - Px\rangle + \langle Px, Px\rangle = \|Px\|^2$.
ii) $\Rightarrow$ iii): Unmittelbar aus Definition.
iii) $\Rightarrow$ iv): Definition und Aufgabe 65 b).
iv) $\Rightarrow$ v): Ein selbstadjungierter Operator ist normal.
v) $\Rightarrow$ i): Für einen normalen Operator gilt $\ker P = \ker P^*$. Weiter ist $\ker P^* = (\operatorname{im} P)^\perp$.

b) Nach ii) gilt $\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle \leq \|Px\| \cdot \|x\|$.

c) $(1 - P)^2 = 1 - 2P + P^2 = 1 - P$, also P ist idempotent. Natürlich ist es auch selbstadjungiert. Die Aussage $x - Px \perp Px$ ist zu ii) äquivalent. Für die letzte Aussage bemerke: $\langle x - Px, Py\rangle = \langle P(1 - P)x, y\rangle$.

d) Die Abgeschlossenheit folgt aus c), denn es gilt $\operatorname{im}(P) = \operatorname{im}(1 - (1 - P)) = \ker(1 - P)$. Es gilt ferner $\|x - y\|^2 = \|x - Px + Px + y\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px + y\|^2 \leq \|x - Px\|^2$ für jedes $y \in \operatorname{im}(P)$.

e) Angenommen $PQ = 0$ gilt, so ist $(P + Q)(P + Q) = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + 0 + 0 + Q = P + Q$, also ist $P + Q$ idempotent. Es ist auch selbstadjungiert, also eine Orthogonalprojektion. Umgekehrt nehmen wir an, dass $P+Q$ eine Orthogonalprojektion ist. D.h. insbesondere $P+Q = (P+Q)(P+Q) = P^2+PQ+QP+Q^2 = P+PQ+QP+Q$. Also gilt $PQ + QP = 0$, und so $PQ = -QP$. Daher ist $PQ = P^2Q = -PQP$ und $PQP = -QP^2 = -QP$, also ist $PQ = QP$ und damit $PQ + QP = 2PQ = 0$, d.h. $QP = PQ = 0$.

f) Für $x \in H$ gilt $\|(P - Q)x\|^2 = \|P(1 - Q)x - (1 - P)Qx\|^2 = \|P(1 - Q)x\|^2 - 2\Re\langle P(1 - Q)x, (1-P)Qx\rangle + \|(1-P)Qx\|^2 = \|P(1-Q)x\|^2 + \|(1-P)Qx\|^2 \leq \|Qx\|^2 + \|(1-Q)x\|^2 = \|x\|^2$.