Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
18.–19. Oktober 2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Übung zu Banachräumen - Lösungsvorschlag

1.

a) i) Seien $x, y \in \mathbb{R}^d$, und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann $\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^d |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^d |x_i| = |\lambda| \|x\|_1$. Die Fälle

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^d |x_i| + \sum_{i=1}^d |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

$$\|x+y\|_\infty = \max_{1\leq i\leq d} |x_i + y_i| \leq \max_{1\leq i\leq d} |x_i| + \max_{1\leq i\leq d} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

$$\begin{aligned}\|x+y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^d |x_i + y_i| \cdot |x_i| + \sum_{i=1}^d |x_i + y_i| \cdot |y_i| \leq \\ &\leq \Big(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2 \sum_{i=1}^d |x_i|^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{i=1}^d |x_i + y_i|^2 \sum_{i=1}^d |y_i|^2\Big)^{1/2} \\ &= \|x+y\|_2 \cdot \|x\|_2 + \|x+y\|_2 \cdot \|y\|_2.\end{aligned}$$

Also sind alle drei normierte Räume. Bemerkung: falls $(x^k) \in (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ konvergente bzw. Cauchyfolge ist, sind die Koordinatenfolgen (x_i^k) $(i = 1, \dots, d)$ auch konvergent bzw. Cauchy. Die Umkehrung ist auch wahr: z.B. sei $(x_d) \subseteq (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ eine Folge so, dass (x_i^k) $(i = 1, \dots, d)$ eine Cauchy- (bzw. konvergente) Folge ist. Dann ist (x^k) eine Cauchy- bzw. konvergente Folge in $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ (die Fälle $p = 1, 2$ sind analog). Dies zeigt die Vollständigkeit der Räume.

b) Es ist einfach zu zeigen, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm ist (siehe Teil a)). Sei $((x_n))^k \subseteq \ell^\infty$ eine Cauchyfolge. Dann konvergieren (wie im Teil a) $x_n^k \to y_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ für $k \to \infty$.

$$|y_n| = \lim_{k\to\infty} |x_n^k| \leq \sup \|x^k\|_\infty < \infty,$$

denn eine Cauchyfolge ist beschränkt. Daher $(y_n) \in \ell^\infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$

$$|x_n^m - x_n^k| \leq \|x^m - x^k\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ falls } m, k \geq N.$$

Nun betrachten wir den Grenzwert $m \to \infty$. Dann erhalten wir

$$|y_n - x_n^k| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ falls } k \geq N.$$

Daher $\|(y_n) - (x_n)^k\|_\infty \leq \varepsilon$ für alle $k \geq N$.

2. Einfach die Definition von Vollständigkeit hinschreiben!

3.

a) Die Eigenschaften einer Norm sind einfach zu überprüfen.
b) Verwende: auf einem endlich-dimensionalen Raum sind alle Normen äquivalent.
c) Falls $((x_n, y_n)) \subseteq X \times Y$ eine Cauchyfolge ist, so sind $(x_n) \subseteq X$ und $(y_n) \subseteq Y$ auch Cauchyfolgen. Nach Voraussetzung konvergieren sie auch gegen x bzw. y. Aber dann konvergiert (x_n, y_n) gegen (x, y).

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4.

a) p_1 ist eine Norm auf $C([a,b])$. X ist ein Unterraum dessen, also ist auch p_1 eine Norm auf X. Betrachte eine konstante Funktion $f \neq 0$. Dann ist $f' = 0$, $p_2(f) = 0$, also kann p_2 keine Norm sein.

b) X ist bezüglich p_1 nicht abgeschlossen in $C([a,b])$, also auch kein Banachraum.

c) Offensichtlich ist p_3 eine Norm. Sei $(f_n) \subseteq (X, p_3)$ eine Cauchyfolge, d.h., dass $(f_n') \subseteq C([a,b])$ auch eine Cauchyfolge ist. Daher $f_n' \to g$ in $C([a,b])$. Setze $h_n(x) := \int_a^x f_n'$. Dann sind h_n stetig differenzierbar mit $h_n' = f_n'$ und $f_n(x) - h_n(x) = f_n(a)$. $|h_m(x) - h_n(x)| \leq \int_a^b |f_m' - f_n'|$, also ist $(h_n) \subseteq C([a,b])$ eine Cauchyfolge, deshalb ist $(f_n) \subseteq C([a,b])$ auch eine Cauchyfolge, folglich gilt $f_n \to f$. Aus Analysis I wissen wir, dass g differenzierbar ist und $g' = f$. Dies zeigt $f_n \overset{p_3}{\to} f$.

5.

a) Welche Eigenschaften einer Norm sind, ohne dass Bedingungen an ω gestellt sind, immer erfüllt? Positivität, Homogenität und die Dreieckungleichung sind klar, d.h. p_ω ist immer eine Halbnorm. Zu Untersuchen ist, wann die Implikation „$p_\omega(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$“ gilt. Betrachte $\omega^{-1}(0)$. Ist das Innere von $\omega^{-1}(0)$ nicht leer, findet man eine positive, stetige Funktion $f \neq 0$ so, dass $f(s) = 0$ für $s \in [a,b] \setminus \omega^{-1}(0)$. Daher $|f(s)|\omega(s) = 0$ für alle $s \in [a,b]$ aber $f \neq 0$, also ist p_ω keine Norm. Umgekehrt, nehmen wir an, dass p_ω keine Norm ist. Daraus folgt die Existenz einer stetigen Funktion $f \neq 0$ mit $\omega(s)f(s) = 0$. Deshalb gilt $[a,b] \setminus f^{-1}(0) \subseteq \omega^{-1}(0)$. Dies zeigt, dass das Innere von $\omega^{-1}(0)$ nicht leer ist. Zusammenfassend: p_ω ist eine Norm genau dann, wenn $\omega^{-1}(0)$ leeres Inneres hat.

b) Nach Aufgabe a) ist p_ω eine Norm. Sei $(f_n) \subseteq C([a,b])$ eine Cauchyfolge bezüglich p_ω. Da $|f_n(s) - f_m(s)| = |\omega(s)f_n(s) - \omega(s)f_m(s)|/\omega(s) \leq p_\omega(f_n - f_m)/\varepsilon$, erhalten wir, dass (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm ist. Deswegen konvergiert sie auch in $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ gegen ein f. Aus der Beschränktheit von ω folgt $p_\omega(f_n - f) \leq \sup \omega \cdot \|f_n - f\|_\infty$, und wir erhalten die Behauptung: $p_\omega(f_n - f) \to 0$. Bemerkung: was wir eigentlich bewiesen haben, ist die Äquivalenz der zwei Normen.