Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
20.–21. Dezember 2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Übung zu Hilberträumen – Lösungsvorschlag

47. Es gilt

$$\|x+\alpha^k y\|^2 = \|x\|^2 + \alpha^{-k}\langle x,y\rangle + \alpha^k\langle y,x\rangle + \|y\|^2,$$

also

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k\|x+\alpha^k y\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k\|x\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}\langle x,y\rangle+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{2k}\langle y,x\rangle+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{-k}\|y\|^2 = 0+n\langle x,y\rangle+0+0,$$

denn $\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{2k} = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k = 0$ nach Voraussetzung.

48. $\Rightarrow$: Falls $x_n \to x$ in Norm, dann gelten auch $\|x_n\| \to \|x\|$ und $\langle x_n, y\rangle \to \langle x,y\rangle$, denn die Abbildungen $x \mapsto \|x\|$ und $x \to \langle x,y\rangle$ sind stetig.

$\Leftarrow$: Umgekehrt gilt

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle = \|x_n\|^2 - \langle x_n, x\rangle - \langle x, x_n\rangle + \|x\|^2 \to \|x\|^2 - 2\langle x,x\rangle + \|x\|^2 = 0.$$

49.

a) Sei $H = \ell^2$ und $U := c_{00} = \{(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, x_n \neq 0 \text{ nur für endlich viele } n\}$. Dann ist U dicht in H, also $U^{\perp\perp} = H \neq U$.

b) $U^{\perp\perp}$ ist immer abgeschlossen. Im Allgemeinen ist wahr, dass $M^\perp$ abgeschlossen ist, denn sei $u_n \in M^\perp$ und $u_n \to u$. Dann gilt für $m \in M$ $0 = (m, u_n) \to (m,u)$, also $u \in M^\perp$. Dies zeigt, dass $U^{\perp\perp}$ und, wenn $U = U^{\perp\perp}$ gilt, auch U abgeschlossen ist. Natürlich gilt $U \subseteq U^{\perp\perp}$ und so $U^\perp \supseteq U^{\perp\perp\perp}$. Ferner ist $U^\perp \subseteq U^{\perp\perp\perp}$, also ist $U^\perp = U^{\perp\perp\perp}$ auch wahr. Nehmen wir jetzt an, dass $U \subsetneq U^{\perp\perp}$ und dass U abgeschlossen ist. Dann existiert $y \in U^{\perp\perp} \setminus U$ mit $y \perp U$. Dass heißt $y \in U^\perp$ und $y \notin U^{\perp\perp\perp}$. Dies ist ein Widerspruch.

c) Sei $x_0 \in M$, so dass $\|x - x_0\| = \inf_{y\in M}\|x - y\|$, und sei $y \in M$, $\alpha \in (0,1]$ beliebig. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\|x_0 - x\|^2 &\le \|(1-\alpha)x_0 + \alpha y - x\|^2 \\ &= \|\alpha(y - x_0) - (x - x_0)\|^2 = \alpha^2\|y - x_0\|^2 - 2\alpha\Re(y - x_0, x - x_0) + \|x_0 - x\|^2,\end{aligned}$$

also folgt für $\alpha \to 0$, dass $\Re(y - x_0, x - x_0) \le 0$. Daraus bekommen wir $\Re(y, x - x_0) \le \Re(x_0, x - x_0)$. Andererseits $\Re(x_0, x - x_0) = \Re(x_0 - x, x - x_0) + \Re(x, x - x_0) < \Re(x, x - x_0)$, also folgt mit $\Re(x_0, x - x_0) < c < \Re(x, x - x_0)$ und $\varphi(z) := (z, x - x_0)$ die Behauptung.

50. Klar ist, dass $(r_n, r_n) = 1$ gilt. Außerdem $(r_n, r_k) = 0$ für $n \neq k$, denn für $n > k$ ist das Integral

$$\int_{i/2^k}^{(i+1)/2^k} r_n r_k = \pm\int_{i/2^k}^{(i+1)/2^k} r_n = 0, \qquad i = 0, \ldots, 2^k - 1.$$

Zunächst bemerken wir, dass für $n > 1$ und $t \in [-1/2, 1/2]$ $r_n(1/2 + t) = r_n(1/2 - t)$ gilt. Sei $f(t) = |1/2 - t| + c$, dann gilt $(r_n f)(1/2 + t) = (r_n f)(1/2 - t)$ für $n > 1$, also $\int_0^1 r_n f = 0$. Wähle $c \in \mathbb{R}$, so dass $\int_0^1 r_1 f = 0$. Die so definierte Funktion $f \neq 0$ ist zu jedem r_n Orthogonal, also (r_n) ist keine Orthonormalbasis.

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

51.

a) Nach dem Satz von Lax–Milgram existiert genau ein stetiger und stetig invertierbarer, linearer Operator mit $a(v, w) = (v, Aw)$ für alle $v, w \in H$. Außerdem existiert nach dem Rieszschen Darstellungsatz genau ein $z \in H$ mit $\varphi(v) = (v, z)$ für alle $v \in H$. Dann ist $u := A^{-1}z$ das eindeutig bestimmte Element in H für das

$$a(v, u) = (v, Au) = (v, AA^{-1}z) = (v, z) = \varphi(v).$$

b) Beweis des Hinweises:

$$\begin{aligned} F(v) - F(u) &= \tfrac{1}{2}(a(v, v) - a(u, u)) - \Re\varphi(v - u) \overset{\text{a)}}{=} \tfrac{1}{2}(a(v, v) - a(u, u)) - \Re a(v - u, u) = \\ &= \tfrac{1}{2}\big(a(v, v) - a(u, u) - (a(v - u, u) + \overline{a(v - u, u)})\big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\big(a(v, v) - a(u, u) - (a(v - u, u) + a(u, v - u))\big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\big(a(v, v) - a(u, u) - (a(v, u) + a(u, v) - 2a(u, u))\big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\big(a(v, v) - a(v, u) - a(u, v) + a(u, u))\big) = \tfrac{1}{2}a(v - u, v - u), \end{aligned}$$

also liefert die Koerzivität die gewünschte Abschätzung. Dies zeigt, dass $F(v) \geq \frac{\alpha}{2}\|v - u\| + F(u) > F(u)$, falls $u \neq v$, woraus die Behauptung folgt.