Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
22.-23. November 2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Übung zu Kompaktheit – Lösungsvorschlag

26.

a) Sei $m \in c_0$. Dann existiert $m^n \in c_{00}$ mit $\|m^n - m\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$. Definiere M_n analog zu M durch Multiplikation mit m^n. Dann gilt $\dim \operatorname{im}(M_n) < \infty$, also ist M_n kompakt. Die Operatoren M_n konvergieren gegen M bezüglich der Operatornorm, also muss M auch kompakt sein.

b) Sei zum Beispiel $X = \ell^2$ und $T_n x := (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$. Dann konvergiert $T_n x$ gegen x für jedes $x \in X$, aber der Identitätsoperator ist nicht kompakt, obwohl die Folge (T_n) aus kompakten Operatoren (denn sie haben endlichdimensionales Bild) besteht.

27. Es gelten: $X = c_0$, $X' = \ell^1$, $X'' = \ell^\infty$. Der Recht- bzw. Links-Shift auf ℓ^1 und ℓ^∞ wird auch mit R und L bezeichnet.

a) Die Definition nachrechnen: $L' = R$, $R' = L$ und $L'' = L$, $R'' = R$. Sei $x \in c_0$, $x' \in \ell^1$. Dann gilt

$$x'(Lx) = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n x_{n+1} = 0x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} x_n x'_{n-1} = x(Rx'),$$

also $L' = R$, und genau so $R' = L$.

b) Für jedes $x \in c_0$ gilt $L^n x \to 0$ in $\|\cdot\|_\infty$. Genau so gilt $(L')^n x' \to 0$ in $\|\cdot\|_1$ für $x' \in \ell^1$, aber z.B. für $x ='' (0, 1, 0, 1, \dots) \in \ell^\infty$ konvergiert $(L'')^n x''$ nicht. Daher bekommen wir auch das Folgende: $x \in c_0$ gilt $L^n x \to 0$ schwach. Sei x'' wie vorher, $x' = (1, 0, 0 \dots)$. So konvergiert $x''((R')^n x') = (R'' x'')(x') = 1 + (-1)^n$ nicht. Dies zeigt, dass $(R')^n x'$ und $(R'')^n x''$ auch nicht schwach konvergieren.

28.

a) Verwende den Satz von Arzelà-Ascoli und dazu den Mittelwertsatz der Diefferentialrechnung.

b) Verwende den Satz von Arzelà-Ascoli.

29. Betrachte $K := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{N}$, die ein kompakter, metrischer Raum ist. Jede Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ ist eine stetige Funktion auf $\mathbb{N}$ (versehen mit der diskreten Topologie (oder Metrik)). Die Nullfolgen $a \in c_0$ haben stetige Fortsetzungen auf K gegeben durch $a(\infty) = 0$. Identifiziere also $\mathcal{A}$ mit einer Teilmenge von $C(K)$, und wende den Satz von Arzelà-Ascoli an. Alternativ: wiederhole den Beweis des Arzelà-Ascoli-Satzes.

30. Sei $x_n + y_n \in L + K$ mit $x_n \in L$, $y_n \in K$, $x_n + y_n \to z$. Es ist $z \in L + K$ zu zeigen. Da K kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $y_{n_k} \to y \in K$. Somit gilt $x_{n_k} \to z - y$ und $z - x \in L$ (L abgeschlossen). Dies zeigt $z \in L + K$. Ist zusätzlich L kompakt, so ist $L \times K$ auch kompakt, und da $+ : X \times X \to X$ stetig ist, folgt, dass $L + K = +(L \times K)$ als stetiges Bild einer kompakten Menge auch kompakt ist. Alternativ: argumentiere mit Folgen: finde konvergente Teilfolgen in K und L.