Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
01.–02. November 2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Übung zu linearen Opeartoren - Lösungsvorschlag

11.

a) Sei $x \in X$ und $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x$. Dann ist $(Tx_n) \subseteq Y$ eine Cauchyfolge, also auch konvergent gegen ein y, da Y vollständig ist. Definiere die Fortsetzung so: $Tx := y$. Man zeige die Eindeutigkeit dieser Definition. Die Linearität ist trivial und die Stetigkeit der Fortsetzung folgt aus $\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\| \to \|T\| \|x\|$.

b) Linearität ist klar. Falls $(m_n) \in \ell^\infty$, ist der Operator beschränkt, und hat eine stetige Fortsetzung auf ℓ^p, die auch noch durch die obige Multiplikation gegeben ist. Umgekehrt muss (m_n) beschränkt sein, denn betrachte $\delta_n \in \ell^p$. Dann gilt $M\delta_n = (0, 0, \ldots, m_n, \ldots)$ und $\|\delta_n\|_p = 1$, also folgt aus $|m_n| = \|M\delta_n\| \leq \|M\|$ die Beschränktheit von (m_n).

12.

a) $\|R\| = 1$ und $\|L\| \leq 1$ sind trivial, es gilt sogar $\|Rx\| = \|x\|$. Weiter gilt $L(0, 1, 0, \ldots) = (1, 0, 0, \ldots)$, also $\|L\| = 1$. Klar ist, dass $\|M(x_1, x_2, \ldots)\| = \|(m_1x_1, m_2x_2, \ldots)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n| \cdot \|(x_1, x_2, \ldots)\|$, d.h. $\|M\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|$. Sei $n_k \in \mathbb{N}$, so dass $m_{n_k} \to \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|$ für $k \to \infty$ gilt. Sei $(x^k_n) \in \ell^p$ definiert durch $x^k_{n_k} = 1$ und $x^k_i = 0$ falls $i \neq n_k$. Dann $\|M(x^k_n)\| = |m_{n_k}| \to \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|$, also $\|M\| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|$. Analog beweist man $\|ML\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |m_n|$.

b) Es geht alles im Wesentlichen so wie im Falle $n = 1$, also $\|R^n\| = \|L^n\| = 1$ und $\|M^n\| = \sup_{k=1} |m^n_k|$, ferner gilt $\|T^n\| = |m_1| \cdot |m_2| \cdots |m_n|$.

13.

14. Korovkin

15.

a) Mit Induktion beweist man $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n + 1)T^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Annahme: beide Operatoren sind stetig. Dann gilt $\|(n+1)T^n\| = \|ST^{n+1} - T^{n+1}S\| \leq \|ST\| \cdot \|T^n\| + \|TS\| \cdot \|T^n\|$. Also gilt $(n + 1) \leq \|ST\| + \|TS\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$: ein Widerspruch.

c) In endlicher Dimension kann man mit der Spur argumentieren: $0 = \mathrm{Tr}(ST) - \mathrm{Tr}(TS) \neq \mathrm{Tr}(I)$.