Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
15–16. November 2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5. Übung zu linearen Funktionalen – Lösungsvorschlag

21. Die erste Aussage folgt daraus, dass eine ℓ^1-Folge auch gegen 0 konvergent ist. Zu der zweiten Aussage betrachte

$$y_n = (\underbrace{1/n, \dots, 1/n}_{n}, 0, 0 \dots),$$

welches offensichtlich die gewünschten Eigenschaften besitzt.

22.

a) Sei $x_n \in F$ mit $\|x - x_n\| \to \operatorname{dist}(x, F)$. Dann ist natürlich (x_n) beschränkt und besitzt wegen Reflexivität eine schwach konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to y$. Da F konvex und abgeschlossen ist, folgt $y \in F$, und somit $\|x - y\| \geq \operatorname{dist}(x, F)$. Da die Norm schwach unterhalbstetig ist, folgt $\|x - y\| \leq \lim_n \|x - x_n\| = \operatorname{dist}(x, F)$, und somit die Behauptung.

b) Ist $x_n \xrightarrow{\sigma} x$, so ist $D = X'$ eine geeignete Wahl. Umgekehrt sei $D \subseteq X'$ dicht mit gegebenen Eigenschaften. Für $\varphi \in X'$ beliebig ist $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ zu zeigen. Zunächst betrachte $\psi \in D'$ mit $\|\varphi - \psi\| \leq \varepsilon$. So gilt $|\varphi(x) - \varphi(x_n)| \leq |\varphi(x) - \psi(x)| + |\psi(x) - \psi(x_n)| + |\psi(x_n) - \varphi(x_n)| \leq \varepsilon\|x\| + |\psi(x) - \psi(x_n)| + \varepsilon\|x_n|$. Da $\varepsilon > 0$ hier beliebig ist, folgt die Behauptung.

23.

a) Z.B. φ_y mit $y = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots,)$.

b) Sei $x = (1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots, 1, 1, 0, \dots,)$. Es gilt wegen der Eigenschaften eines Banach-Limites: $\varphi(x) = \varphi(Lx) = \varphi(L^2x)$. Somit gilt $3\varphi(x) = \varphi(x+Lx+L^2x) = \varphi((2, 2, 2 \dots)) = 2$.

c) Analog zu b): Sei k eine Periode der Folge $x = (x_n)$. Betrachte $k\varphi(x) = \varphi(x + Lx + L^2x + \dots + L^{k-1}x) = \varphi((s, s, s, \dots)) = s$, mit $s = x_1 + x_2 + \dots + x_k$.

d) Wiederhole den Beweis für die Existenz von Banach-Limiten aus der Vorlesung.

24.

a) Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge in X. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle $\varphi_n \in X'$ mit $\varphi_n(x_n) = \|x_n\|$ und $\|\varphi_n\| = 1$. So gilt $|\varphi_n(x)| \geq |\varphi_n(x_n)| - |\varphi_n(x) - \varphi_n(x_n)| \geq \|x_n\| - \|\varphi_n\| \cdot \|x - x_n\| = \|x_n\| - \|x - x_n\|$, dies ist aber größer als $\|x\| - \varepsilon$ für genügend großes $n \in \mathbb{N}$.

b) Sei φ_n die Folge aus a). Definiere $J : X \to \ell^\infty$ durch $J(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots)$. Klar: J ist linear und bildet tatsächlich nach ℓ^∞ ab. Aus den Eigenschaften von (φ_n) folgt die Isometrie-Eigenschaft und somit die Injektivität. Man muss nicht zeigen, dass das Bild von J in ℓ^∞ abgeschlossen ist. Hier argumentiert man z.B. mit konvergenten Folgen.

25. Bemerke zunächst, dass es egal ist, welche Norm auf dem Produktraum betrachtet wird.

a) Seien A_i abzählbare dichte Teilmengen in X_i, $i = 1, \dots, n$. Dann ist $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ abzählbar und dicht in $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

b) Man zeigt erst, dass $(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)'$ isomorph zu $X_1' \times \dots \times X_n'$ ist. Dann ist das Problem so umformuliert: es ist die Surjektivität von $\iota : X_1 \times \dots \times X_n \to X_1'' \times \dots \times X_n''$ zu zeigen. Aber das ist leicht, denn die Surjektivität folgt koordinatenweise aus der Voraussetzung.