TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13. Übung zu Selbstadjungierten Operatoren

62. Wir betrachten den Hilbertraum ℓ^2 und den linearen Operator T definiert durch $(Tx)_n := ix_n + \frac{1}{n}x_{n+1}$. Bestimme T^*. Zeige, dass ein Multiplikator auf ℓ^2 normal ist.

63. Es sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
a) $i \in \varrho(T)$ und $-i \in \varrho(T)$
b) $U_T := (T+i)(T-i)^{-1}$ ist unitär (U_T heißt *die Cayley-Transformierte* von T)
c) $1 \in \varrho(U_T)$ und es gilt $T = -i(1+U_T)(1-U_T)^{-1}$

64. Zu zeigen ist das Folgende: Ist $T \in \mathcal{L}(H)$, so existieren eindeutig bestimmte selbstadjungierte Operatoren $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H)$ mit $T = T_1 + iT_2$. Es gilt $T_1 = (T+T^*)/2$, $T_2 = i(T^* - T)/2$. Der Operator T ist genau dann normal, wenn T_1 und T_2 kommutieren.

65. Es sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$ und $T \in \mathcal{L}(H)$. Zeige:
a) T ist eine Isometrie $\iff \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \iff T^*T = \mathrm{Id}$
b) T ist selbstadjungiert $\iff \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$
c) T ist unitär $\iff$ T ist eine surjektive Isometrie

Hausübungen

66. Wir bezeichnen die Menge aller selbstadjungierten Operatoren in $\mathcal{L}(H)$ mit $\mathcal{L}_{sa}(H)$. Beweise, dass $\mathcal{L}_{sa}(H)$ ein Banachraum über $\mathbb{R}$ ist. Wir definieren die Relation $\leq$ durch

$$S \leq T \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \langle Sx, x\rangle \leq \langle Tx, x\rangle \quad \text{für alle } x \in H.$$

Zeige, dass $\mathcal{L}_{sa}(H)$ versehen mit $\leq$ eine partiell geordnete Menge ist. Ein Operator T ist positiv genau dann, wenn $0 \leq T$. Welche Multiplikatoren auf ℓ^2 sind unitär bzw. selbstadjungiert oder positiv?

67.
a) Sei $P \in \mathcal{L}(H)$ idempotent, d.h. $P^2 = P$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen.

i) $\ker P = (\operatorname{im} P)^\perp$
ii) $\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle$ für alle $x \in H$.
iii) P ist positiv, d.h. $\langle Px, x\rangle \geq 0\ \forall x \in H$
iv) P ist selbstadjungiert
v) P ist normal

Hinweis: Zeige i) ⇒ ii) ⇒ iii) ⇒ iv) ⇒ v) ⇒ i)

Idempotente Operatoren $P: H \to H$ mit diesen äquivalenten Eigenschaften heißen *Orthogonalprojektionen*. Seien nun $P, Q: H \to H$ Orthogonalprojektionen. Zeige die folgenden Aussagen:
b) P ist eine Kontraktion.
c) $I - P$ ist eine Orthogonalprojektion, und $x - Px \perp Px$. Es gilt $\ker(P) = \operatorname{im}(I-P)$.
d) $\operatorname{im}(P)$ ist abgeschlossen und es gilt $\|Px - x\| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{im}(P))$.
e) $P + Q$ ist genau dann eine Orthogonalprojektion, wenn $PQ = 0$ gilt.
f) Es gilt $\|P - Q\| \leq 1$. *Hinweis: benutze* $\|(P-Q)x\|^2 = \|P(1-Q)x - (1-P)Qx\|^2$.