TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

## 2. Übung zu Banachräumen und zum Satz von Stone–Weierstraß

**6.**

a) Zeigen Sie, dass die Räume $c$, $c_0$, $\ell^p$ mit $1 \leq p < \infty$ separabel sind.
b) Zeigen Sie, dass $\ell^\infty$ nicht separabel ist.

**7.** Betrachten Sie den Raum $C^1[0,1]$ versehen mit der Norm $\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $|||f||| := \|f'\|_\infty + |f(0)|$ ist eine äquivalente Norm zu $\|f\|_{C^1}$.
b) Es gilt

$$(C[0,1] \oplus \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty + |\cdot|) \simeq \big(C^1[0,1], |||\cdot|||\big).$$

**8.** Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Der Raum der stetigen, periodischen Funktionen $C_{\text{per}}[0,2\pi]$ versehen mit der $\|\cdot\|_\infty$-Norm ist ein Banachraum.
b) Es sei $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Dann gilt: $C_{\text{per}}[0,2\pi] \simeq C(\Gamma, \mathbb{C})$.
c) Es gilt: $\text{lin}\{z^n, \overline{z}^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ liegt dicht in $C(\Gamma, \mathbb{C})$.
d) $\text{lin}\{e^{inx} : n \in \mathbb{Z}\}$ liegt dicht in $C_{\text{per}}[0,2\pi]$.
e) $\text{lin}\{\sin(nx), \cos(nx) : n \in \mathbb{N}_0\}$ liegt dicht in $C_{\text{per}}[0,2\pi]$.
f) (Als Hausübung:) Es gilt:

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= p_n(\cos x), \\ \sin(nx) &= \sin x q_{n-1}(\cos x). \end{aligned}$$

### Hausübungen

**9.**

a) Es sei $a \leq \alpha < \beta \leq b$ und $E := \{f \in C([a,b]) : f(s) = 0 \text{ für alle } s \in [\alpha,\beta]\}$. Zeigen Sie: $E$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $C([a,b])$. Der Quotient $C([a,b])/E$ ist isometrisch isomorph zu $C([\alpha,\beta])$.
b) Zeigen Sie:

$$C([0,1]^2) = \overline{\text{lin}}\{f \cdot g : f,g \in C[0,1]\}.$$

**10.**

a) Sei $\text{Lip}([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ Lipschitz-stetig}\}$. Für $f \in \text{Lip}([0,1])$ sei

$$\|f\|_{\text{Lip}} := |f(0)| + \sup_{x \neq y} \left| \tfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \right|$$

Zeigen Sie, dass $(\text{Lip}([0,1]), \|\cdot\|_{\text{Lip}})$ ein Banachraum ist.
b) Zeigen Sie: $C^1([0,1]) \subsetneq \text{Lip}([0,1]) \subsetneq C[0,1]$.