Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
13.–14. Dezember 2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

## 9. Übung zu $L^p$-Räumen

**42.** Zeige die folgende Aussagen:

a) Für $1 < p < \infty$ ist $L^p[0,1]$ reflexiv.
b) Der Raum $L^\infty[0,1]$ ist nicht reflexiv und nicht separabel.
c) $L^1[0,1]$ ist separabel und nicht reflexiv.
d) Der Dualraum von $L^\infty[0,1]$ ist nicht zu $L^1[0,1]$ isomorph.

**43.**

a) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann definiert die Abbildung $T_f g := f * g$ einen stetigen linearen Operator auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $\|T_f\| \le \|f\|_1$. Bestimme den Adjungierten $T_f'$!
b) Seien $p_0, p_1 \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$ und $\frac{1}{p_\theta} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Sind $f \in L^{p_0}(M,\mu) \cap L^{p_1}(M,\mu)$, dann $f \in L^{p_\theta}(M,\mu)$, und es gilt
$$\|f\|_{p_\theta} \le \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$
c) Beweise die Hausdorff-Young-Ungleichung ($\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$) durch Verwendung des Satzes von Riesz-Thorin.

**44. Approximatives Einselement.**

a) Sei $f \in BUC(\mathbb{R}^d)$ und $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Mollifier. Zeige, dass $\rho_n * f \to f$ in $BUC(\mathbb{R}^d)$ (d.h. gleichmäßig).
b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Zeige, dass
$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda_d(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y = f(x) \quad \text{gilt,}$$
wobei die Konvergenz in der $L^1$-Norm zu verstehen ist. (Übrigens besagt ein Satz von Lebesgue, dass diese Aussage auch mit „Konvergenz fast überall” gilt.)

### Hausübungen

**45.** Die übrigen Aufgaben aus 44.

**46.** Sei $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, also eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger.

a) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ (es reicht eigentlich $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$). Zeige $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$, also $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ für jeden Multiindex $\alpha$.
b) Gilt zusätzlich
$$\exists N > 0 : f(t) = 0 \text{ für fast alle } t \text{ mit } |t| \ge N,$$
so ist $f * g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.
c) $C_c^\infty(\mathbb{R})$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R})$ *Hinweis: betrachte einen Mollifier.*
d) Überlege, warum $C_c^\infty(\mathbb{R})$ nicht dicht in $L^\infty(\mathbb{R})$ liegt.