Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
20.–21. Dezember 2007

10. Übung zu Hilberträumen

47. (Polarisationsidentität) Sei H ein komplexer Prähilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ und $\alpha\in\mathbb{C}$, so dass $\alpha^n=1$ aber $\alpha^k\neq 1$ für $k=1,2,\dots,n-1$. Beweise die folgende Identität

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k\|x+\alpha^k y\|^2.$$

Übrigens kann man diese Identität verwenden, um den folgenden Satz zu zeigen: In einem normierten Vektorraum $(X,\|\cdot\|)$ existiert ein Skalarprodukt mit $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$ genau dann, wenn $\|\cdot\|$ die Parallelogrammgleichung erfüllt.

48. Beweise, dass in einem Hilbertraum die Äquivalenz

$$x_n\to x\qquad\Longleftrightarrow\qquad\begin{cases}x_n\xrightarrow{\sigma}x\ \text{(schwache Konvergenz)}\\ \|x_n\|\to\|x\|\end{cases}$$

gilt.

49. Sei H ein Hilbertraum und U ein Unterraum von H.
a) Gib Beispiele von Räumen H und U an, so dass $U\neq U^{\perp\perp}$.
b) Zeige, dass $U^{\perp\perp}=U$ genau dann gilt, wenn U in H abgeschlossen ist.
c) Sei $M\subseteq H$ konvex und abgeschlossen und $x\notin M$. Zeige, dass ein $\varphi\in H'$ und ein $c\in\mathbb{R}$ existiert mit $\Re\varphi(y)<c<\Re\varphi(x)$ für alle $y\in M$. (Ohne die Verwendung von Hahn-Banach.)

Hausübungen

50. (Rademacher-Funktionen in L^2) Zeige, dass die *Rademacher-Funktionen*

$$r_n(t):=\operatorname{sign}(\sin(2^n\pi t)),\quad n=0,1,2,\dots$$

ein Orthonormalsystem, aber keine Orthonormalbasis von $L^2([0,1])$ bilden. Skizziere außerdem r_0,r_1 und r_2, usw.

51. (Dirichletsches Prinzip) Sei H ein Hilbertraum, $a:H\times H\to\mathbb{R}$ eine stetige, koerzive Sesquilinearform und $\varphi\in H'$. Beweise die folgenden Aussagen:
a) Es gibt genau ein $u\in H$ mit $a(v,u)=\varphi(v)$ für alle $v\in H$.
b) Die Funktion

$$F(v):=\frac{1}{2}a(v,v)-\Re\varphi(v),\quad v\in H,$$

ist stetig, beschränkt nach unten und nimmt ihr Minimum an genau einer Stelle, nämlich u aus a), an.
Hinweis: Zeige, dass es ein $\alpha>0$ gibt, so dass für alle $v\in H$ gilt:

$$F(v)-F(u)=\frac{1}{2}a(v-u,v-u)\geq\frac{\alpha}{2}\|v-u\|^2.$$