Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
29.-30. November 2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. Übung zum Dualraum von $C(K)$

31. Betrachte den Banachraum $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Zeige folgende Aussagen:

a) Wenn $f_n \xrightarrow{\sigma} f$, dann $f_n \longrightarrow f$ punktweise.

b) Es existieren $(f_n), f$, so dass $f_n \longrightarrow f$ punktweise, aber nicht $f_n \xrightarrow{\sigma} f$.

32. Setze $K := \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ und definiere $d : K \times K \to \mathbb{R}_+$ durch

$$d(n,m) := \begin{cases} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} & \text{für } n \neq m,\ n,m \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n+1} & \text{für } m = +\infty,\ n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{m+1} & \text{für } n = +\infty,\ m \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige, dass (K,d) ein kompakter metrischer Raum ist.

b) Bestimme die offenen und die abgeschlossenen Mengen in K. Bestimme die Borel-σ-Algebra.

c) Zeige $(c, \|\cdot\|_\infty) \simeq (C(K), \|\cdot\|_\infty)$.

d) Bestimme, die endlichen, regulären Borel-Maße auf K. Beweise $\mathcal{M}(K) = \{\alpha_\infty \delta_\infty + \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \delta_n : (\alpha_n) \in \ell^1,\ \alpha_\infty \in \mathbb{R}\}$.

e) Bestimme den Dualraum von c.

33. Alle Funktionen in dieser Aufgabe sind auf $[0,1]$ definiert.

a) Beweise, dass eine monotone Funktion in $BV[0,1]$ liegt.

b) Sei $g \in BV[0,1]$. Zeige, dass die Funktion $h(t) := V_0^t g$ monoton steigend und $f(t) := g(t) - h(t)$ monoton fallend ist. Zeige, dass jede BV-Funktion als die Summe zweier monotoner Funktionen dargestellt werden kann.

c) Sei $g \in BV[0,1]$ und $f \in C[0,1]$, falls nicht explizit gegeben. Berechne $\int_0^1 f\, \mathrm{d}g$ für

(i) $f = \mathbf{1}$ (ii) $g = \chi_{[0,a)}$ (iii) $g = \displaystyle\sum_{j=1}^n b_j \chi_{[a_j, a_{j+1})}$ (iv) $g(x) = x^2 + \operatorname{sign}(x - 1/2), f(x) = x$.

d) Sei $g(x) = 1/2 - |x - 1/2|$. Zeige $g \in BV[0,1]$, also $\varphi_g \in (C[0,1])'$. Nach dem Riesz'schen Darstellung-Satz existiert ein signiertes Borel-Maß μ auf $[0,1]$, so dass $\varphi_\mu = \varphi_g$. Gib dieses Maß an, sowie seine Hahn- und Jordan Zerlegung.

Hausübungen

34.

a) Bestimme den Dualraum von $C_0(\mathbb{R})$. Dazu betrachte $K = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$, analog zur Aufgabe 32. Zeige, dass $C_0(\mathbb{R})$ zu einem abgeschlossenen Unterraum von $C(K)$ isomorph ist.

b) Betrachte den Links-Shift $L : C_0(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$: $(Lf)(t) := f(t+1)$. Bestimme die Operatornorm und den adjungierte Operator L'.

35. Sei $(X, \mathcal{M})$ ein Maßraum und μ ein signiertes Maß. Für $A \in \mathcal{M}$ definieren wir

$$\tau(A) := \sup\Big\{ \sum_n |\mu(A_n)| : A = \bigcup_n A_n,\ A_n \in \mathcal{M},\ A_n \cap A_m = \emptyset\ (n \neq m) \Big\}.$$

Zeige, dass τ ein Maß ist und, dass $\tau = \mu_+ + \mu_-$ gilt. Dies ist eine Erklärung zur Bezeichnung *„totale Variation"*.