Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
15.-16. November 2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5. Übung zu linearen Funktionalen II.

21. Betrachte den Banachraum c_0 und die Folge $\delta_n \in c_0$ ($\delta_n(k) = 1$ falls $n = k$, sonst 0). Zeige $\delta_n \xrightarrow{\sigma} 0$ und gib $(y_m) \subset \operatorname{conv}\{\delta_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $y_m \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ an.

22.

a) Sei X ein reflexiver Banachraum und $F \subseteq X$ eine nicht leere, konvexe und abgeschlossene Menge. Zeige, dass für jedes $x \in X$ ein $y \in F$ existiert mit

$$\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|.$$

b) Sei X ein normierter Vektorraum, $(x_n) \subseteq X$ eine beschränkte Folge. Zeige, dass x_n genau dann schwach gegen x konvergiert, wenn eine dichte Teilmenge $D \subseteq X'$ existiert mit $\lim x'(x_n) = x'(x)$ für jedes $x' \in D$.

23.

a) Gib multiplikative lineare Funktionale $\varphi : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ an.

Sei $\varphi : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ ein Banach-Limes.

b) Bestimme $\varphi((1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots, 1, 1, 0, \ldots,))$.

c) Sei $(x_n) \in \ell^\infty$ eine periodische Folge. Bestimme $\varphi((x_n))$.

d) Für $(x_n) \in \ell^\infty$ betrachte die Cesarò-Mittel-Folge c_n und zeige, dass für jedes $\lambda \in [\liminf c_n, \limsup c_n]$ ein Banach-Limes φ mit $\varphi((x_n)) = \lambda$ existiert.

Hausübungen

24.

a) Sei X ein separabler Banachraum. Beweise, dass eine Folge $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \ldots \in X'$ mit

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(x)| \quad \text{für jedes } x \in X$$

existiert.

b) Zeige, dass jeder separable Banachraum zu einem abgeschlossenen Teilraum von ℓ^∞ isometrisch isomorph ist.

25. Für $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Banachräume zeige das Folgende:

a) Falls X_i, $i = 1, \ldots, n$, alle separabel sind, dann ist $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ auch separabel.

b) Falls X_i, $i = 1, \ldots, n$, alle reflexiv sind, dann ist $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ auch reflexiv.