TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Übung zu linearen Operatoren

11.

a) Seien X, Y normierte Vektorräume und Y vollständig, $D \subseteq X$ ein dichter Unterraum und $T : D \to Y$ ein beschränkter linearer Operator. Zeigen Sie: T hat eine eindeutige stetige Fortsetzung auf X.

b) Sei $c_{00} := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x_n \neq 0$ für höchstens endlich viele $n\}$. Sei $(m_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ eine Folge und definiere den lineare Operator $M : c_{00} \to c_{00}$ durch $M(x_n) = (m_n x_n)$. Zeigen Sie, dass so tatsächlich ein linearer Operator definiert wird. Welche Bedingungen muss man an (m_n) stellen, damit M bezüglich der ℓ^p-Norm ($1 \leq p < \infty$) beschränkt ist? Geben Sie die Fortsetzung von M auf ℓ^p an.

12. Es sei $X := \ell^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Die Operatoren R, L seien definiert durch

$$\begin{aligned} R : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (0, x_1, x_2, \dots) \\ L : (x_1, x_2, \dots) &\quad\mapsto\quad (x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

Betrachte auch den Operator M aus Aufgabe 11 b), und setze $T := ML$.

a) Zeigen Sie, dass R, L, T beschränkt sind und bestimmen Sie die jeweiligen Operatornormen.

b) Es gelte außerdem $|m_1| \geq |m_2| \geq \cdots$. Für $n \in \mathbb{N}$ bestimme man die Operatornormen von R^n, L^n, M^n, T^n.

13. Sei $(a_{ij}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ eine unendliche Matrix. Zeigen Sie: Die Formel

$$(Tx)_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \qquad i \in \mathbb{N},\ x \in \ell^\infty$$

definiert einen stetigen, linearen Operator T auf ℓ^∞ genau dann, wenn $\sup_{i\geq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty$.

14. Für $f \in C[0,1]$ definiere die *Bernstein-Polynome* durch

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Zeigen Sie:

a) $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$ ist linear und stetig. Bestimmen Sie die Norm!

b) $B_n f$ ist ein Polynom mit Grad $\leq n$.

c) $f \geq 0 \Rightarrow B_n f \geq 0$.

d) $B_n f \to f$ gleichmäßig.

e) Beweisen Sie den Satz von Weierstraß über polynomielle Approximation.

15. Sei X ein normierter Raum und $S, T : X \to X$ lineare Abbildungen mir der Eigenschaft $ST - TS = Id$.

a) Zeigen Sie: es gilt $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

b) Zeigen Sie, dass S oder T unstetig ist.

c) Sei X von endlicher Dimension. Zeigen Sie, dass keine linearen Abbildungen $S, T : X \to X$ mit der Eigenschaft $ST - TS = Id$ existieren, indem Sie mit der Spur argumentieren.