TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Übung zu L^p-Räumen

36. Sei $(X,\mathcal{M})$ messbarer Raum. Für positive Maße μ,ν,ν_j,μ_n auf $\mathcal{M}$ zeige die folgenden Aussagen:

a) Absolutstetigkeit $\ll$ ist eine transitive Relation
b) μ und ν heißen äquivalent "$\mu\sim\nu$", falls $\mu\ll\nu$ und $\nu\ll\mu$ gelten. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.
c) Singularität $\perp$ ist eine symmetrische Relation.
d) Gilt $\nu\ll\mu$ und $\mu\perp\nu$, so ist $\nu=0$.
e) Es gilt $\mu_j\ll\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$.
f) Für $\nu_j\ll\mu$ $(j=1,\dots)$ gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu_n\ll\mu$.
g) Für $\nu_j\perp\mu$ $(j=1,\dots)$ gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu_n\perp\mu$.
h) Falls $\nu\ll\mu\perp\sigma$, so gilt $\nu\perp\sigma$.

37.
a) Sei $X=\mathbb{N}$ und μ=Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Betrachte die Räume $\ell^p:=L^p(\mathbb{N},\mu)$ und zeige, dass $\ell^p\subseteq\ell^r\subseteq c_0$ für alle $1\le p\le r<\infty$ gilt.
b) Sei $(X,\mathcal{M},\mu)$ ein endlicher Maßraum und $1\le r\le p\le\infty$. Beweise, dass $L^p(X,\mu)\subseteq L^r(X,\mu)$ gilt, und für $f\in L^\infty(X,\mu)$ auch $\|f\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|f\|_p$ wahr ist.
c) Betrachte $L^p((0,1)^d)$ und $f(x)=|x|^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Für welche $1\le p\le\infty$ liegt f in L^p?
d) Zeige, dass der Raum L^p im Allgemeinen keinen der Räume L^r mit $p\neq r$ enthält.

38.
a) Zeige, dass für $f,g\ge 0$, $f,g\in L^1(X,\mu)$ gilt $\|f+g\|_1=\|f\|_1+\|g\|_1$.
b) Sei K kompakter metrischer Raum. Betrachte die Menge $M_b(K)$ aller endlichen, signierten Borel-Maße. Zeige, dass $M_b(K)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und versehen mit der Norm $\|\mu\|=\mu_+(K)+\mu_-(K)$ ein Banachraum ist. Beweise die zu a) analoge Aussage für positive Maße, d.h. zeige für $\mu,\nu\ge 0$, dass $\|\mu+\nu\|=\|\mu\|+\|\nu\|$ gilt.

Hausübungen

39. Beweise das Folgende: Für $1<p<\infty$ sind L^p-Räume strikt konvex, d.h. für $f,g,\in L^p(X,\mu)$ mit $\|f+g\|_p=2$, $\|f\|_p=\|g\|_p=1$ gilt $f=g$. Was kann man im Falle $p=1,\infty$ aussagen?

40. Sei $(X,\mathcal{M},\mu)$ ein Maßraum. Die folgende Aussagen sind zu beweisen.
a) Der Raum $L^1\cap L^\infty(X,\mu):=L^1(X,\mu)\cap L^\infty(X,\mu)$, versehen mit der Norm $\|f\|_{L^1\cap L^\infty}:=\|f\|_1+\|f\|_\infty$, ist ein Banachraum.
b) Definiere $L^1+L^\infty(X,\mu):=\{f:\ f:X\to\mathbb{K}$ messbar und $\exists g\in L^1(X,\mu),\ h\in L^\infty(X,\mu)$ mit $f=g+h\}$. Die Abbildung
$$\|f\|_{L^1+L^\infty}:=\inf\{\|h\|_1+\|g\|_\infty : f=g+h,\ h\in L^1,\ g\in L^\infty\}$$
ist eine Norm; versehen mit dieser ist L^1+L^∞ ein Banachraum.
c) Es gilt $L^p(X,\mu)\hookrightarrow L^1+L^\infty(X,\mu)$, wobei die Einbettung stetig ist. D.h. für $f\in L^p(X,\mu)$ gilt $f\in L^1+L^\infty(X,\mu)$ und $\|f\|_{L^1+L^\infty}\le C\|f\|_p$ für ein von f unabhängiges $C\ge 0$.