TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11. Übung zu Kategoriensatz und Spektrum

52. Zeige: ein Banachraum X ist entweder von endlicher Dimension, oder jede Basis in X ist überabzählbar.

53. Sei X ein normierter Vektorraum, $M \subseteq X$ und $M' \subseteq X'$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) M ist beschränkt genau dann, wenn für jedes $\varphi \in X'$ die Menge $\{|\varphi(x)| : x \in M\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.
b) Jede schwach konvergente Folge ist beschränkt.
c) Ist X ein Banachraum, so ist M' genau dann in X' beschränkt, wenn die Menge $\{|\varphi(x)| : \varphi \in M'\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist.
d) Seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$, $S : Y' \to X'$ linear, so dass
$$y'(Tx) = (Sy')(x) \quad \text{gilt für alle } x \in X \text{ und } y' \in Y'.$$
Dann sind T und S stetig.

54. Es sei $X = C([0,1])$ und wir definieren für $g \in C([0,1])$ den Operator
$$M_g : X \to X, \quad f \mapsto gf.$$

a) Zeige, dass $M_g \in \mathcal{L}(X)$ gilt und die Abbildung $\Phi : X \to \mathcal{L}(X)$, $g \mapsto M_g$ eine Isometrie ist.
b) Bestimme zu vorgegebenem g das Spektrum von M_g
c) Gib für $\lambda \in \varrho(M_g)$ die Resolvente $R(\lambda, M_g)$ an.
d) Unter welcher Annahme an g ist $P\sigma(M_g) \neq \emptyset$?

Hausübungen

55. Seien X, Y Banachräume. Beweise die folgenden Aussagen.

a) Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ist abgeschlossen.
b) Für einen linearen Operator $A : D \to Y$ ist $\mathrm{gr}\,(A)$ ein Unterraum von $X \times Y$.
c) A ist abgeschlossen $\iff$ $\mathrm{gr}\,(A)$ ist abgeschlossen in $X \times Y$.
d) Sei $A : D \to Y$ linear und abgeschlossen. Versehen mit der Graphennorm $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$ ist D ein Banachraum.
e) Der Operator $A : (D, \|\cdot\|_A) \to Y$ ist stetig.

Gib Beispiele $A : D \to Y$ linearer, stetiger aber nicht abgeschlossener Operatoren an.

56. Sei $X = C([0,1])$ und $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Bestimme das Spektrum und den Spektralradius des folgenden Operators V:
$$(Vf)(x) := \int_0^x f(y)k(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{für } x \in [0,1]$$