TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12. Übung zu Spektrum

57.

a) Es sei $X := \ell^2$, $(m_n) \in \ell^\infty$. Betrachte den Multiplikator $M = M_{(m_n)}$, d.h., $M(x_n) = (m_n x_n)$. Bestimme den Spektralradius, das Punktspektrum, das approximative Punktspektrum und das Residualspektrum des Operators M.

b) Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und nicht leer. Zeige, dass es einen stetigen Operator T auf ℓ^2 gibt, für den $\sigma(T) = K$. *Hinweis: Betrachte eine abzählbare dichte Teilmenge* $\{a_1, a_2, \dots,\}$ *in* K *und denke an Multiplikatoren!*

c) Sei $(\lambda_n) \in c_0$. Gib einen kompakten Operator T auf ℓ^2 an, dessen Spektrum genau $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ist, so dass, falls $\lambda_k \neq 0$, $\dim \ker(\lambda_k - T)$ gleich der Multiplizität von λ_k in der Folge (λ_n) ist (d.h., wieviel mal λ_k in dieser Folge auftaucht).

58. Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Zeige die folgenden Aussagen:

a) $\lambda - T : X \to X$ ist abgeschlossen.

b) Ist $\lambda \notin P\sigma(T)$ so ist $(\lambda - T)^{-1} : \operatorname{im}(\lambda - T) \to X$ auch abgeschlossen.

c) Sei $\lambda \notin P\sigma(T)$. Es gilt $\lambda \in A\sigma(T)$ genau dann, wenn $(\lambda - T)^{-1} : \operatorname{im}(\lambda - T) \to X$ unstetig ist. *Hinweis: benutze den Satz vom abgeschlossenen Graphen.*

d) $\lambda \in A\sigma(T)$ genau dann, wenn eine Folge $(x_n) \subseteq X$ existiert mit $\|x_n\| = 1$ und $(\lambda - T)x_n \to 0$.

59. Es sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) $R\sigma(T) = P\sigma(T')$ *Hinweis: verwende Hahn-Banach*

b) Wenn T eine Isometrie ist, so gilt $A\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. *Hinweis: verwende Aufgabe 58.d)*

c) Ist X ein Hilbertraum so gilt $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$. *Hinweis: zeige* $\rho(T) \subseteq \overline{\rho(T^*)}$ *und verwende* $T^{**} = T$.

Hausübungen

60. Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Zeige die folgenden Aussagen.

a) $\sigma(T^2) = \{\lambda^2 : \lambda \in \sigma(T)\}$.

b) $P\sigma(T^2) = \{\lambda^2 : \lambda \in P\sigma(T)\}$.

c) $A\sigma(T^2) = \{\lambda^2 : \lambda \in A\sigma(T)\}$.

Hinweis: es gilt $\lambda^2 - T^2 = (\lambda - T)(\lambda + T)$

61. Es seien die Operatoren $R, L : \ell^2 \to \ell^2$ definiert durch

$$\begin{aligned} R : (x_1, x_2, \dots) &\mapsto (0, x_1, x_2, \dots) \\ L : (x_1, x_2, \dots) &\mapsto (x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

Bestimme den Spektralradius, das Punktspektrum, das approximative Punktspektrum und das Residualspektrum dieser Operatoren L, R. *Für* $P\sigma(L)$, $P\sigma(R)$ *untersuche die Injektivität von* $\lambda - L$ *bzw.* $\lambda - R$. *Für die restlichen Aufgaben darf man Aufgabe 59 sowie die Tatsachen* $R = L'$, $R' = L$ *verwenden.*