Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
22.-23. November 2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

6. Übung zu Kompaktheit

26.

a) Sei $m \in \ell^\infty$ und $M : \ell^1 \to \ell^1$ sei definiert durch $(Mx) = m_n x_n$. Dann ist M kompakt genau dann, wenn $m \in c_0$. Beweise dies.

b) Widerlege anhand eines Gegenbeispiels die folgende Behauptung: Ist (T_n) eine Folge kompakter Operatoren auf einem Banachraum X und existiert $Tx := \lim T_n x$ für alle $x \in X$, dann ist T kompakt.

27. Sei $X = c_0$ und $L =$Linksshift bzw. $R =$Rechtsshift, d.h.,

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots) \quad \text{und} \quad R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

a) Bestimme die adjungierten Operatoren L' und R' auf X', und L'' und R'' auf X''.

b) Untersuche die Konvergenz für $n \to \infty$ von $L^n x$, $R^n x$, $(L')^n x'$, $(R')^n x'$ und $(L'')^n x''$, $(R'')^n x''$ für $x \in X$, $x' \in X'$ und $x'' \in X''$.

28.

a) Zeige, dass der Identitätsoperator $I : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ kompakt ist.

b) Sei $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ stetig. Für $f \in C(I)$ definiere

$$(Tf)(x) := \int_0^x k(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y, \qquad x \in [0,1].$$

Zeige, dass T kompakt ist.

Hausübungen

29. Beweise: eine Menge $\mathcal{A} \subseteq c_0$ ist kompakt genau, dann wenn sie abgeschlossen, beschränkt ist und die folgende Eigenschaft hat: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ und alle $(a_n) \in \mathcal{A}$ gilt $|a_n| \leq \varepsilon$.

30. Sei X ein normierter Vektorraum, $L \subseteq X$ abgeschlossen, $K \subseteq X$ kompakt. Man zeige, dass $L + K := \{x + y : \, x \in L, \, y \in K\}$ abgeschlossen ist. Ist L kompakt, dann folgt auch die Kompaktheit von $L + K$. Beweise dies.