Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
18.–19. Oktober 2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Übung zu Banachräumen

1.

a) Für $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ sei

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \quad \|x\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2\Big)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty := \max_{1\le i\le d} |x_i|.$$

i) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$, $p = 1, 2, \infty$ Banachräume sind.

ii) Skizzieren Sie für $d = 1, 2, 3$ die "Einheitskugeln" $B_p := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_p \le 1\}$.

b) Zeigen Sie: $\ell^\infty := \{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}$, versehen mit $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$, ist ein Banachraum.

2. Zwei normierte Vektorräume $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, |||\cdot|||)$ heißen isometrisch isomorph ($X \simeq Y$), falls ein linearer (algebraischer) Isomorphismus J zwischen X und Y existiert, welcher auch eine Isometrie ist: $|||Jx||| = \|x\|$. Zeigen Sie: X ist vollständig genau dann, wenn Y vollständig ist.

3. Seien $(X, \|\cdot\|)$ und $(Y, |||\cdot|||)$ normierte Vektorräume und $1 \le p \le \infty$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\|(x,y)\|_p := \begin{cases} \Big(\|x\|^p + |||y|||^p\Big)^{1/p} & 1 \le p < \infty \\ \max\{\|x\|, |||y|||\} & p = \infty. \end{cases}$$

eine Norm auf $X \times Y$ definiert. Das Paar $(X \times Y, \|(\cdot,\cdot)\|_p)$ wird mit $X \underset{p}{\oplus} Y$ bezeichnet.

b) Die Normen $\|(\cdot,\cdot)\|_p$ sind alle äquivalent auf $X \times Y$.

c) Sind X, Y vollständig, so folgt auch die Vollständigkeit von $X \oplus_p Y$.

Hausübungen

4. Für $a < b$ sei $X := C^1([a,b]) := \{f \in C([a,b]) : f \text{ stetig differenzierbar in } [a,b]\}$. Für $f \in X$ sei

$$p_1(f) := \sup\{|f(s)| : s \in [a,b]\}$$
$$p_2(f) := \sup\{|f'(s)| : s \in [a,b]\}$$
$$p_3(f) := |f(a)| + \sup\{|f'(s)| : s \in [a,b]\}$$

Zeigen Sie

a) p_1 ist eine Norm auf X; p_2 ist keine Norm auf X.

b) (X, p_1) ist kein Banachraum.

c) (X, p_3) ist ein Banachraum.

5. Es sei $X := C([a,b])$ für $a < b$ und $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, nichtnegative Funktion. Wir setzen

$$p_\omega(f) := \sup\{\omega(s)|f(s)| : s \in [a,b]\}.$$

a) Welche Bedingungen muss man an ω (genauer an $\omega^{-1}(0)$) stellen, damit p_ω eine Norm ist?

b) Es existiere $\varepsilon > 0$ so, dass $\omega(s) \ge \varepsilon$ für alle $s \in [a,b]$. Dann ist (X, p_ω) ein Banachraum.