TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14. Übung zu Fouriertransformation

68. Betrachte die folgenden Funktionen:

i) Die Sägezahnwelle, die den Klang eines Synthesizers aus der 80'er Jahren beschreibt, ist mathematisch gegeben durch:

$$f(x) := \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi),\ f(0) := 0,\ f(2\pi) = 0, \quad \text{sonst } 2\pi\text{-periodisch.}$$

ii) Die Rechteckwelle, die z.B. den Klang einer verzerrten elektrischen Gitarre (ungefähr) angibt, ist wie folgt gegeben:

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{für } \pi < x < 2\pi \\ 0 & \text{für } x = 0, \pi, 2\pi, \end{cases}$$

sonst 2π-periodisch.

Wir untersuchen die Konvergenz der Fourier-Reihen dieser Funktionen. Dafür wird die folgende Version eines allgemeinen Satzes benötigt.

(vereinfachtes) Dini-Lipschitz-Kriterium: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und von beschränkter Variation auf $[0, 2\pi]$. So gilt für die Partialsumme $s_n(f)$ der Fourier-Reihe von f das Folgende:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f)(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad \text{gleichmäßig in } x,$$

wobei mit $f(x \pm 0)$ der Grenzwert von f an der Stelle x nach rechts bzw. links bezeichnet wird.

†a) Beweise, dass eine Funktion von beschränkter Variation an jeder Stelle Links- und Rechts-Limiten besitzt.

b) Zeige, dass die Funktionen f und g dem obigen Kriterium genügen und damit ihre Fourier-Reihen gleichmäßig gegen die jeweiligen Funktionen konvergieren.

c) Schreibe die jeweiligen Fourier-Reihen, auch als Sinus-Cosinus-Reihe, auf und beobachte, welche Obertöne dort auftauchen.

d) Beweise die folgenden, aus Analysis bekannten Identitäten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}.$$

69. Beweise, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \Big(1 - \frac{|j|}{n}\Big) e^{ijt} = \frac{1}{n} \Big(\frac{\sin n\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\Big)^2,$$

gilt.

70.

a) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Zeige $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

b) Sei $f \in C_c^1(\mathbb{R})$. Beweise $\widehat{f'}\,(t) = -it\hat{f}(t)$.

c) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Beweise $\widehat{f'}\,(t) = -it\hat{f}(t)$.

71. Wir wollen die folgende partielle Differentialgleichung für $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lösen:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u(s,x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} u(s,x) \\ u(0,x) = f(x) \qquad\qquad f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ vorgegeben.} \end{cases}$$

a) Benutze die Fourier-Transformation bzgl. der Variablen x, um einen Kandidaten zu raten.

b) Argumentiere, warum dieser Kandidat eine Lösung ist.

Schöne Semesterferien!