Einführung in die Funktionalanalysis, WS07/08
Bálint Farkas
Matthias Heß
08.-09. November 2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Übung zu linearen Funktionalen

16. Wir untersuchen lineare Funktionale auf c_0, c, ℓ^∞ und ℓ^1.

a) Sei $y = (y_n) \in \ell^1$ und setze $\varphi_y((x_n)) := \sum_n x_n y_n$ für $(x_n) \in \ell^\infty$. Zeige, dass $\varphi_y \in (\ell^\infty)'$ und somit auch $\varphi_y \in c', c_0'$ gilt. Bestimme $\|\varphi_y\|$.

b) Beweise: Ist $(y_n) \in \ell^\infty$, so definiert das obige φ_y ein Element aus $(\ell^1)'$. Bestimme $\|\varphi_y\|$.

c) Zeige, dass $J : \ell^1 \to c_0'$, $J(y) := \varphi_y$ einen isometrische Isomorphismus definiert.

d) Definiere auf c das Funktional $\psi((x_n)) := \lim_{n\to\infty} x_n$. Zeige $\psi \in c'$. Gibt es ein $(y_n) \in \ell^1$, so dass $\varphi_y = \psi$? Beweise, dass jedes lineare Funktional $\varphi \in c'$ sich als $\lambda\psi + \varphi_y$ für ein $y \in \ell^1$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ schreiben lässt.

e) Zeige, dass stetige lineare Funktionale $\varphi \in (\ell^\infty)'$ existieren, die $\varphi((a_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n$ erfüllen für alle $(a_n) \in c$.

f) Zeige, dass $\ell^1 \ni y \mapsto \varphi_y \in (\ell^\infty)'$ eine normerhaltende lineare Abbildung aber nicht surjektiv auf $(\ell^\infty)'$ ist.

17. Sei X ein normierter Vektorraum. Beweise die folgende Aussagen:

a) Ist A, B konvex so ist $A \cap B$, $\overline{A}$ und $\operatorname{int} A$ (das Innere von A) auch konvex. Der Durchschnitt von beliebig vielen konvexen Mengen ist auch konvex.

b) Jede abgeschlossene, konvexe Menge C ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbräume, die C enthalten.

c) In einem normierten Vektorraum ist die Einheitskugel B konvex, absorbierend und kreisförmig, d.h. $\lambda B \subseteq B$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| \le 1$.

d) Sei M eine kompakte, konvexe, absorbierende und kreisförmige Menge in $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$. Zeige, dass M eine offene (euklidische) Kugel um 0 enthält und das Minkowski-Funktional p_M eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ ist. Gib die abgeschlossene Einheitskugel bezüglich p_M an!

18. Gib zwei disjunkte, konvexe, abgeschlossene Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ an, die nicht strikt getrennt werden können. (Keine der Beiden kann kompakt sein!)

Hausübungen

19. Ein normierter Vektorraum heißt strikt konvex, falls $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\|x + y\| = 2$ die Gleichheit $x = y$ implizieren.

a) Zeige, dass $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ für $p = 2$ strikt konvex ist, während es für $p = 1, \infty$ nicht strikt konvex ist. Was ist die geometrische Bedeutung von strikter Konvexität?

b) Zeige, dass c_0, c, ℓ^∞, ℓ^1, $C[0,1]$ nicht strikt konvex sind.

c) Sei X' strikt konvex und $Y \subseteq X$ ein Unterraum, $\psi \in Y'$. Beweise, dass die Fortsetzung $\varphi \in X'$ mit $\varphi|_Y = \psi$ und $\|\varphi\| = \|\psi\|$ im Satz von Hahn-Banach eindeutig ist.

20. Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ offene konvexe Mengen in einem normierten Vektorraum mit $A \cap B = \emptyset$. Zeige, dass ein $\varphi \in X'$ existiert mit $\operatorname{Re}\varphi(x) < \operatorname{Re}\varphi(y)$ für alle $x \in A$ und $y \in B$. *Hinweise zum Beweis:*

a) Setze $M = A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$ und zeige, dass M offen und konvex ist mit $0 \notin M$.

b) Sei $x_0 \in M$ und betrachte $M' = M - x_0$, so gilt $-x_0 \notin M'$.

c) Setze $Y := \operatorname{lin}\{x_0\}$, $\psi(\alpha x_0) := -\alpha p_{M'}(-x_0)$. Verwende den Satz von Hahn-Banach mit diesem $p_{M'}$ und ψ.