Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
23.01.2008

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

7. Tutorium

T21 (Lineare DGLn)
Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden DGLn:

i) $y'(t) = -y(t)\sin t + \sin t$;
ii) $y'(t) - ty(t) = t$.

T22 (Laguerre-DGL)

i) Bestimme mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes eine Lösung der so genannten *Laguerre-Differentialgleichung*:

$$ty''(t) + (1-t)y'(t) + my(t) = 0, \quad m \in \mathbb{R} .$$

ii) Für welche m ergeben sich Polynome $L_m(t)$ als Lösungen? Man nennt diese Lösungspolynome nach der Differentialgleichung *Laguerre-Polynome*.

iii) Zeige, dass die Polynome folgender Gleichung genügen

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}),\ n = 0, 1, 2, \dots .$$

T23 (Exakte DGLn)

i) Die Koeffizienten $g(t,y), h(t,y)$ der Differentialgleichung

$$g(t,y) + h(t,y)y' = 0$$

seien auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig-differenzierbar.
Zeige: Hängt die Funktion $f_h := \frac{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial t}}{h(t,y)}$ nur von t ab, so ist $M(t) := e^{\int f_h(t)\,dt}$ ein integrierender Faktor.

ii) Bestimme einen integrierenden Faktor der DGL

$$(2t^2 + 2ty^2 + 1)y + (3y^2 + t)y'(t) = 0 .$$

Bem.: Hängt die Funktion $f_g := \frac{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial t}}{g(t,y)}$ nur von y ab, ist $M(y) := e^{\int f_g(y)\,dy}$ ein integrierender Faktor.

T24 (DGLn)

i) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lokal Lipschitz-stetige, bezüglich der ersten Komponente L-periodische Funktion, d.h.,

$$f(t+L, y) = f(t,y) \text{ für alle} (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} .$$

Sei ϕ auf ganz $\mathbb{R}$ existierende Lösung der DGL $y'(t) = f(t,y)$. Weiterhin gebe es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\phi(x_0+L) = \phi(x_0)$. Zeige, dass ϕ L-periodisch ist.

ii) Sei $r > 0, I := (-r, r)$ und seien $a, b :\ I \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. a sei ungerade und b sei gerade, d.h.

$$a(-x) = -a(x), \quad b(-x) = b(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Zeige: Die Differentialgleichung

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

besitzt ein Fundamentalsystem von Lösungen (d.h. hier: zwei linear unabhängige Lösungen), das aus einer geraden und einer ungeraden Funktion besteht.