Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
09.01.2008

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

6. Tutorium

T18 (Picard-Lindelöf)

i) Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und bezüglich des zweiten Argumentes stetig differenzierbar. Zeige, dass die Lösung des AWP

$$y'(t) = f(t, y) \cdot \sin |y|, \quad y(0) = y_0$$

für alle $y_0 \in \mathbb{R}^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ existiert.

ii) Sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(0) = 0$ und $g(y) > 0$ für alle $y < 0$. Zeige, dass die Lösung des Anfangswertproblems $y' = g(y)$, $y(0) = y_0 < 0$ für alle $t \geq 0$ existiert und dass $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$ gilt.
Hinweis: Die DGL ist autonom.

T19 (Trennung der Variable)
Bestimme die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen

i) $y'(t) = \cosh(t)\sqrt{1 + y^2}$

ii) $y'(t) = \frac{y}{t} - \alpha\sqrt{1 + (\frac{y}{t})^2}$

iii) $y'(t) = (t + y)^2$

Verwende die Substitutionen: ii) $z = \frac{y}{t}$ iii) $z = y + t$.

T20 (Existenz und Eindeutigkeit)
Für ein AWP $y' = f(t, y),\ y(t_0) = y_0$ läßt sich die Iterationsfolge

$$\phi_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_{n-1}(s))\, ds$$

der Picard-Iteration auch dann bilden, wenn $f(t, y)$ nicht lokal Lipschitz-stetig ist. Aber die Hoffnung, dass die Folge (ϕ_n) gegen eine Lösung des AWP konvergiere, kann trügen.

i) Sei $f(t, y)$ stetig. Zeige: Wenn (ϕ_n) auf geeignetem kompakten Intervall J gleichmässig gegen ϕ konvergiert, so ist ϕ auf J Lösung der Gleichung $y' = f(t, y)$.

Betrachte nun die auf $R := \{(t, y):\ |t| \leq 1, |y| \leq 1\}$ definierte Funktion

$$f(t, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0, |y| \leq 1, \\ 2t & \text{für } 0 < |t| \leq 1, -1 \leq y < 0, \\ 2t - 4\frac{y}{t} & \text{für } 0 < |t| \leq 1, 0 \leq y \leq t^2, \\ -2t & \text{für } 0 < |t| \leq 1, t^2 \leq y \leq 1\ . \end{cases}$$

ii) Zeige: f ist stetig, aber nicht lokal Lipschitz-stetig.

iii) Stelle für das AWP

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0$$

die Iterationsfolge auf und zeige, dass sie nicht konvergent ist.
Hinweis: Die Rechnungen sind einfacher, als es auf den ersten Blick scheint.

iv) Finde gleichmässig konvergente Teilfolgen und zeige, dass auch diese keine Lösungen der DGL sind.

Aber: Die Existenz mindestens einer Lösung wird durch einen Existenzsatz von Peano für stetige Funktionen $f(t, y)$ garantiert!