Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
12.12.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

5. Tutorium

T16 (Lipschitz-Stetigkeit)

Sei $f:\ \Omega \supseteq \mathbb{R}^{n+1} \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}$. Wie bereits in der Vorlesung definiert, erfüllt f bezüglich x eine Lipschitz-Bedingung, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt, sodass

$$||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \leq L||x_1 - x_2|| \quad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in \Omega\ .$$

i) Zeige, dass eine Lipschitz-stetige Funktion gleichmässig stetig ist.

ii) Finde ein Beispiel für eine gleichmässig stetige Funktion, die nicht Lipschitz-stetig ist.

iii) Macht es wirklich Sinn von Lipschitz-Stetigkeit zu sprechen? Finde Argumente, die dafür und dagegen sprechen.

T17 (Differentialgleichungen für Kurvenscharen)

Wir betrachten die Familie der konzentrischen Kreise in $\mathbb{R}^2$, welche für $r > 0$ implizit durch $f(x,y,r) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ gegeben sind.

i) Stelle eine Differentialgleichung auf, welche die Kreislinien für $-r < x < r$ beschreibt.

ii) Welche Probleme treten auf, wenn man die gesamte Kreislinie $x^2 + y^2 = r^2$ als Lösung einer Differentialgleichung schreiben will?

iii) Suche eine differenzierbare Funktion $F:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass die Kreislinien aus ii) Niveaulinien von F sind und skizziere das Vektorfeld $\operatorname{grad} F := (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})^t$.

iv) Gib eine Parametrisierung $(x(t), y(t))$ einer Niveaulinie von F an und skizziere deren Tangentialvektoren.

v) Welche geometrische Beziehung besteht zwischen den Tangentialvektoren (x,y) und dem Vektorfeld $\operatorname{grad} F$?

vi) Zeige, dass die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ der Differentialgleichung

$$\langle \operatorname{grad} F, \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \rangle = \frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$$

genügen. Finde eine Parametrisierung, sodass $x(t) = t$ und vergleiche mit deinem Ergebnis aus i). In welchem Sinn kann man hier von einer Äquivalenz der Differentialgleichung aus i) und vi) sprechen?

T18 (Eulersche DGL)

Im letzten Tutorium haben wir gezeigt, dass sich die so genannte Eulersche DGL

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = 0 \qquad (*)$$

durch die Substitution $x = e^t$ (bzw. $t = \log x$) auf eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten $\sum_{k=0}^n b_k u^{(k)}(t)$ zurückführen läßt, wobei $u(t) = y(e^t)$. Hierbei sind ein paar Fragen offengeblieben.

i) Die Substitution $x(t) = e^t$ ist nur für positive Werte $x(t)$ möglich. Warum bekomme ich trotzdem alle Lösungen?

ii) Wir haben die neue lineare DGL gar nicht explizit angegeben. Wie soll ich denn im allgemeinen ihre Lösung bestimmen?
Zeige, dass man das charakteristische Polynom der linearen DGL aus der ursprünglichen DGL gewinnen kann, indem man $x^\lambda = e^{\lambda t}$ in (*) einsetzt: $\sum_{k=0}^n a_k x^k (x^\lambda)^{(k)}$. Mache dir hierzu klar, dass $\sum_{k=0} b_k (e^{\lambda t})^{(k)} = \sum_{k=0} a_k x^k (x^\lambda)^{(k)}$.

iii) Verwende die Erkenntnis aus ii), um die allgemeine Lösung der DGL

$$x^2 y'' - 3xy' + 7y = 0$$

zu bestimmen.