Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
13.11.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

3. Tutorium

T10 (AWP)

i) Finde zuerst die allgemeine Lösung und dann die Lösung für das Anfangswertproblem

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Bestimme die allgemeine Lösung der DGL

$$y^{(3)}(t) + y^{(2)}(t) - 5y'(t) + 3y(t) = 0.$$

Löse damit das AWP zu den Daten $y(0) = 0, y'(0) = -4, y''(0) = 8$.

T11 (Stationäre und periodische Lösungen)

i) Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ mit einer Lösung $y(t)$. Zeige, dass $y(t)$ genau dann stationär ist, wenn $y(0) \in \ker(A)$.

ii) Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix, und sei n ungerade. Zeige, dass die lineare Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ mindestens eine nicht-periodische Lösung besitzt.

T12 (DGL n-ter Ordnung) Sei eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung gegeben. Von welcher Ordung muss sie sein, damit die Funktionen $x_1(t) = t$ und $x_2(t) = e^t$ ein System von Lösungen sind.

T13 (Matrizenmultiplikation und Produktregel)

i) Zeige, dass eine Folge von Matrizen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $A_i \in M_{m\times n}$ genau dann bezüglich der Operatornorm konvergiert, wenn sie koordinatenweise konvergiert.

ii) Seien $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $A_i \in M_{l\times m}$ und $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $B_i \in M_{m\times n}$ normkonvergente Folgen von Matrizen mit Grenzwert $A \in M_{l\times m}$ bzw. $B \in M_{m\times n}$. Zeige, dass die Folge $C_k := A_k B_k$ den Grenzwert $C = AB$ besitzt. Zeige insbesondere, dass für $A \in M_n$ die Abbildungen $M_n \ni X \mapsto AX \in M_n$ und $M_n \ni X \mapsto XA \in M_n$ normstetig sind.

iii) Seien $A(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{l\times m}$ und $B(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ differenzierbare (Was heißt das hier?) matrixwertige Abbildungen. Zeige, dass die Produktregel

$$(A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t)$$

gilt.