Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
31.10.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

2. Tutorium

T05 (Vektorfelder) In Abb.1 und Abb.2 sind die Vektorfelder zweier Differentialgleichungen darge-

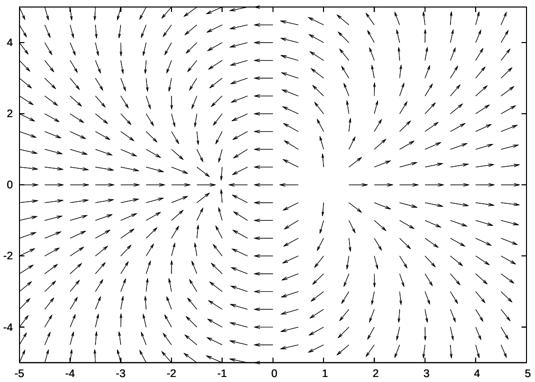

Abbildung 1:

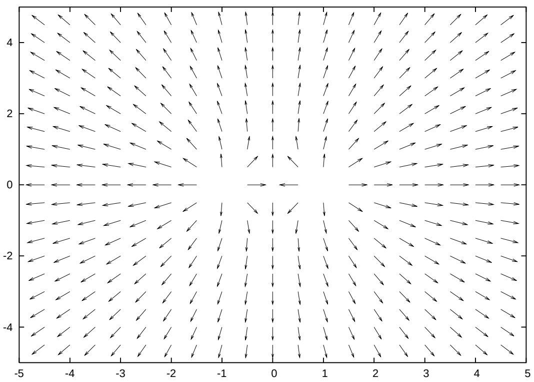

Abbildung 2:

stellt. Skizziere jeweils einige Lösung.

T06 (Exponentialmatrix)
Seien $(V, ||\cdot||_1)$ und $(W, ||\cdot||_2)$ normierte Vektorräume und $T: V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $B(V,W) := \{T: V \to W \text{ linear}, ||T||_{op} < \infty\}$.

i) Zeige: Ist W ein Banachraum, dann ist $B(V,W), ||\cdot||)$ ein Banachraum.
ii) Sei $T \in B(W,W)$. Welche Konsequenzen hat die Behauptung aus $i)$ für die Konvergenz von $e^T := \sum_k^\infty \frac{T^k}{k!}$?

T07 (Approximation der Exponentialmatrix)
Sei V ein Banachraum und sei $A \in B(V,V)$. Zeige, dass

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{1} + \frac{tA}{n})^n$$

gilt. Auf der Rückseite findest du einen Beweis der Behauptung für den Fall $V = \mathbb{C}$ (*K. Königsberger, Analysis 1, Springer 2004*). Verwende ihn als Orientierung.

T08 (Funktionalgleichung)
Sei V ein Banachraum. Seien $S, T: V \to V$ lineare Abbildungen, mit $ST = TS$. Nimm an, dass frühere Resultate über das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen auch auf Banachräumen gültig sind, um zu zeigen, dass

$$e^S e^T = e^{S+T}.$$

T09 (Gerüchteküche und beschränktes Wachstum)
In einer Population der Größe N werde ein Gerücht durch Mundpropaganda verbreitet, d.h., ein Mitglied der Population erfährt das Gerücht (ausschließlich) dadurch, dass ein anderes Mitglied es ihm oder ihr erzählt. Es sei $I(t)$ die Anzahl der Informierten zum Zeitpunkt t. Jeder Informierte habe in einer Zeiteinheit $k > 0$ Kontakte mit anderen Mitgliedern der Population.

i) Zeige -unter der idealisierenden Annahme, dass $I(t)$ eine differenzierbare Funktion ist-, dass $I(t)$ einer DGL vom Typ der DGL des beschränkten Wachstums genügt.
ii) Zeichne das Richtungsfeld, der DGl für $N = 4$ und $k = 1$ und diskutiere dein Ergebnis in der Gruppe.