Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
17.10.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

1. Tutorium

Zu einer expliziten Differentialgleichung 1.Ordnung

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

läßt sich das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (1, f(x, y))$$

zuordnen. F ist das so genannte **Richtungsfeld** der Differentialgleichung.

T01 Zeichne das Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichungen

a) $\frac{dx}{dt} = p \quad p \in \mathbb{R}$ b) $\frac{dx}{dt} = qx, \quad q \in \mathbb{R}$

in Abhängigkeit von p und q.

i) Wie sieht eine Lösung der Differentialgleichungen im Richtungsfeld aus.

ii) Was läßt sich über die Stabilität der Lösungen unter leichten Störungen der Koeffizienten p und q sagen?

T02 Betrachte die Differentialgleichung aus T01.

i) Bestimme jeweils eine Lösung.

ii) Nimm zusätzlich $x(0) = 1$ an. Zeige, dass es nur eine Lösung gibt.

iii) Finde einen Weg, die in T01 ii) untersuchte Stabilität mathematisch zu beschreiben.

T03 Zeichne das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}.$$

i) Gib die Lösungen explizit an.

ii) Findest du eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $y(0) = 0$? Was ist hier geschehen; hast du eine Vermutung?

Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ läßt sich als Vektorfeld interpretieren. Jedem Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ wird ein Vektor $Ax \in \mathbb{R}^n$ zu geordnet.

T04 Betrachte nun die Abbildung

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x.$$

i) Skizziere das Vektorfeld der Abbildung A.

ii) Gegeben sei folgendes System von Differentialgleichungen

$$\begin{array}{rcl} x_1' & = & 2x_1 \\ x_2' & = & -\frac{1}{2}x_2 \end{array}.$$

Was bedeuten die Pfeile des Vektorfeldes aus T04 i) für das System? Wie sieht eine Lösung im Vektorfeld aus?