Prof.B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS07/08
16.01.2008

Analysis III für M. & Ph.:Differentialgleichungen

6. Übung

G25 (Stetige Abhängigkeit vom Vektorfeld)

i)

ii) Sei $v(t) := ||x(t) - y(t)||$.

$$\begin{aligned}
v(t) =& || \int_{t_0}^{t} (x'(s) - y'(s))\, ds|| \\
\leq& \int_{t_0}^{t} ||x'(s) - y'(s)||\, ds \\
=& \int_{t_0}^{t} ||f(s, x(s)) - g(s, y(s))||\, ds \\
\leq& \int_{t_0}^{t} ||f(s, x(s)) - f(s, y(s))||\, ds + \int_{t_0}^{t} ||f(s, y(s)) - g(s, y(s))||\, ds \\
\leq& \int_{t_0}^{t} L \cdot ||x(s) - y(s)||\, ds + \int_{t_0}^{t} \epsilon\, ds \\
=& L \int_{t_0}^{t} (v(s) + \frac{\epsilon}{L})\, ds
\end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$v(t) + \frac{\epsilon}{L} \leq \frac{\epsilon}{L} + L \int_{t_0}^{t} (v(s) + \frac{\epsilon}{L})\, ds \ .$$

Aus dem Lemma von Gronwall folgt dann

$$v(t) + \frac{\epsilon}{L} \leq \frac{\epsilon}{L} e^{L(t-t_0)} \ .$$

G26 (Störung)

Wir betrachten das AWP

$$x''(t) = -\sin(x(t)) + x, \ x(0) = 0 \ . \tag{*}$$

i) $x_1'(t) = x_2(t), \ x_2'(t) = -\sin(x_1(t)) + x_1(t)$. Wir setzten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x_1, x_2) \mapsto (x_2, -\sin x_1 + x_1)$.

ii) Wir wollen hier den in **G25** bewiesenen Satz verwenden, dazu zeigen wir zuerst, dass es für die Differenz $||f(t, x) - g(t, x)||$ eine globale Schranke gibt.

$$||f(t, x) - g(t, x)|| = |-\sin(x_1(t) + x_1(t) - x_1(t)| = |\sin(x_1(t))| \leq 1 \ .$$

Jetzt bestimmen wir noch eine Lipschitzkonstante zu f:

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq || \begin{pmatrix} x_2 - y_2 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} || + || \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x_1 - \sin x_2 \end{pmatrix} || \leq ||x - y|| + 2||x - y|| = 3||x - y|| \ .$$

Wir erhalten aus der stetigen Abhängigkeit vom Vektorfeld

$$||\phi(t) - \psi(t)|| \leq \frac{1}{3}(e^3 t - 1) \ .$$

Für $t = \frac{1}{3} \ln \frac{13}{10} \sim \frac{9}{100}$ ist $||\phi(t) - \psi(t)|| \leq \frac{1}{10}$.

G27 (Wronski-Determinante)

i) $\underline{\Rightarrow:}$ Seien η_i die Komponenten von η bzgl. kanonischer Basis. Dann ist $\phi(t) = \sum_i \eta_i x_i(t) = X(t)\eta$ Lösung des AWP mit $\phi(t_0) = \eta = y(t_0)$. Mit Picard-Lindelöf folgt $\phi(t) = y(t)$.
$\underline{\Leftarrow:}$ Sei $y(t) = X(t)\eta$. Dann ist $y(t)$ Lösung des AWP.

ii) Jede Spalte von $Y(t)$ ist eine Lösung zu einem AWP $y_i(t_0) = \eta_i$. Daher

$$Y(t) = (X(t)\eta_1, \ldots, X(t), \eta_n) = X(t)(y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)) = X(t)Y(t_0)\ .$$

iii) Sei $X(t)$ die spezielle Lösungsmatrix aus i). Wir differenzieren $\det X(t)$:

$$(\det X(t))' = \sum_{i=1}^{n} \det(y_1, \ldots, y_i', \ldots, y_n)\ .$$

Nun betrachten wir die Ableitung an de Stelle $t = t_0$:

$$\begin{aligned}(\det X(t_0))' &= \sum_{i=1}^{n} \det(e_1, \ldots, A(t_0)e_i, \ldots, e_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i i(t_0) = trA(t_0)\ ,\end{aligned}$$

wobei wir $y_i(t_0) = e_i$ und $y_i'(t_0) = A(t_0)e_i$ verwendet haben.
Sei $Y(t)$ nun eine beliebige Lösungsmatrix. Für die Funktion $W(t) = \det Y(t)$ gilt nach ii)

$$W'(t) = (\det X(t))'Y(t_0)$$

und insbesondere

$$W'(t_0) = W(t_0)trA(t_0)\ .$$

Da wir diese Überlegung für jedes beliebige $t_0 \in\ J$ durchführen können, muss $W(t)$ der DGL

$$W'(t) = trA(t)W(t)$$

genügen. Deren Lösung ist aber

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)\,ds}\ .$$

iv) siehe iii)

v)