Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
16.01.2008

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

6. Übung

G21 (Spezielle Lösungsansätze eindimensionaler DGLn)

i) Substitution $u(t) = at + bx(t) + c$
$u'(t) = a + bx'(t) = a + bf(u(t)) \widehat{=}$DGL mit getrennten Varaiblen Substitution $u(t) := at + bx(t) + c$;

ii) $x'(t) + d(t)x(t) = e(t)x(t)^{\alpha},\ \alpha \neq 0, 1$ (*) Substitution: $u(t) = x(t)^{1-\alpha}$

$$u'(t) = (1-\alpha)x^{-\alpha}(t)x'(t) \overset{\alpha\neq 1}{\Rightarrow} x'(t) = \frac{1}{1-\alpha}u'(t)x^{\alpha}(t)$$
$$(*) \Rightarrow \frac{u'}{1-\alpha}x^{\alpha} + d(t)x = e(t)x^{\alpha} \quad | \cdot x^{-\alpha}, x \neq 0$$
$$\frac{1}{1-\alpha}u'(t) + d(t)u(t) = e(t) \mathrel{\widehat{=}} \text{lin. DGL, DGL mit getr. Var.}$$

iii) $x'(t) = d(t)x(t) + e(t)x^2(t) + f(t)$; sei $x_0(t)$ eine Lösung.

$$\text{Substitution} u(t) := \frac{1}{x(t) - x_0(t)}, \Rightarrow \ x(t) = \frac{1}{u(t)} + x_0(t)$$
$$\Rightarrow x'(t) = -\frac{1}{u^2(t)}u'(t) + x_0'(t)$$

In DGL einsetzen:

$$-\frac{1}{u^2}u' + x_0' = \frac{d}{u} + dx_0 + \frac{e}{u^2} + \frac{2ex_0}{u} + ex_0^2 + f$$
$$-u' + x_0'u^2 = du + e + 2ex_0u + dx_0u^2 + ex_0^2u^2 + fu^2$$
$$-u' = (d + 2ex_0)u + e \mathrel{\widehat{=}} \text{lin. DGL, DGL mit getr. Var.}$$

Beachte hier, dass $x_0' = dx_0 + ex_0^2 + f$ nach Vorraussetzung.

G22 (DGLn von Kurvenscharen)

i) Wir differenzieren $y^2 = 4c(c + x)$ nach x. Wir finden $yy' = 2c, c = \frac{1}{2}yy'$, bzw. $y' = \frac{2c}{y}$ Diese DGL ist nur für $y \neq 0$ sinnvoll. Sei $y \neq 0$, erhalten wir durch Einsetzen in die Kurvengleichung

$$y^2 = 2yy'(\frac{1}{2}yy' + x).$$

Die gesuchte Gleichung ist somit
$$y(\frac{dy}{dx})^2 + 2x\frac{2y}{2x} - y = 0.$$

ii) Die Tangentengleichung für jeden Parabelpunkt (a, b) lautet $y - b = \frac{x-a}{b}$ oder, wegen $a = \frac{1}{2}b^2$, auch $by = x + \frac{1}{2}b^2$. Nach Elimination von b aus dieser Gleichung und der Gleichung $by' = 1$, die man durch Diff. nach x erhält, ergibt sich $2x(y')^2 - 2yy' + 1 = 0$.

G23 (Exakte DGLn)

i) Setze $h(t,y) = 2ty$ und $g(t,y) = 2y + t^2$. Dann gilt $\frac{\partial h}{\partial y} = 2t = \frac{\partial g}{\partial t}$. Also ist die DGL exakt. Wir bestimmen die Potentialfunktion durch Integration über t und y und die dabei auftretenden Integrationskonstanten.

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \int \frac{2}{t} y\, d + c_1(y) = t^2 y + c_1(y) \\ &\stackrel{!}{=} \int 2y + t^2\, dy + c_2(t) = y^2 + yt^2 + c_2(t) \\ \Rightarrow\ S(x,y) &= yt^2 + y^2 \end{aligned}$$

Aus der impliziten Lösung $S(t,y) = S(t_0, y_0)$ erhalten wir eine explizite Lösung

$$\begin{aligned} yt^2 + y^2 &= y_0 t_0^2 + y_0^2 \\ y &= -\frac{t^2}{2} \pm \sqrt{\frac{t^4}{4} + y_0 t_0^2 + y_0^2} \end{aligned}$$

ii) Setze $h(t,y) = t^2 + y^2 + t$ und $g(t,y) = yt$. Dann gilt $\frac{\partial h}{\partial y} = 2y \neq y = \frac{\partial g}{\partial t}$. Also ist die DGL nicht exakt. Allerdings kann man den integrierenden Faktor $M(t) = t$ erraten. Die DGL

$$M(t)h(t,y) + M(t)g(t,y)y' = 0$$

ist exakt.Wir bestimmen die Potentialfunktion durch Integration über t und y und die dabei auftretenden Integrationskonstanten.

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \int t^3 + ty^2 + t^2\, dt + c_1(y) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2y^2 + \frac{1}{3}t^3 + c_1(y) \\ &\stackrel{!}{=} \int yt^2\, dy + c_2(t) = \frac{1}{2}y^2t^2 + c_2(t) \\ \Rightarrow\ S(x,y) &= \frac{1}{2}y^2t^2 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 \end{aligned}$$

Aus der impliziten Lösung $S(t,y) = S(t_0, y_0)$ erhalten wir eine explizite Lösung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y^2t^2 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}t^3 &= \frac{1}{2}y_0^2t_0^2 + \frac{1}{4}t_0^4 + \frac{1}{3}t_0^3 \\ y &= \pm \frac{2}{t^2}\sqrt{-\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}y_0^2t_0^2 + \frac{1}{4}t_0^4 + \frac{1}{3}t_0^3} \end{aligned}$$

G24 (Fortsetzen von Lösungen)

i) Da $\phi(t) = 0$ eine LÖsung der DGL zum AW $y_0 = 0$ ist, muss für alle Lösungen $y(t)$ zu AWen $y_0 > 0$ gelten, $y(t) > 0$. Wir formen daher um

$$2t = \frac{y'(t)}{y^2(t)},\ y(0) = y_0\ .$$

Integration und Substitution von $s = y(t)$ ergibt

$$t^2 = 2\int_0^t x\, dx = \int_0^t \frac{y'(x)}{y^2(x)}\, dx = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{s^2}\, ds = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)}.$$

Wir erhalten

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t^2}.$$

ii) Die Funktion hat an den Stellen $t = \pm\frac{1}{\sqrt{y_0}}$ einen Pol. Das maximale Existenzintervall ist daher $I_{max} = (-\sqrt{y_0}, \sqrt{y_0})$.

H16 (DGLn) 4 Punkte

i) Mittels Trennung der Variablen bestimmen wir eine Lösung der DGL

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^y \cos t \\ \frac{dy}{e^y} &= \cos t dt \\ \int_{y_0}^{y} e^{-u}\, du &= \int_{t_0}^{t} \cos s\, ds \\ e^-y &= -\sin t + \sin t_0 - e^{-y_0} \\ y &= -\ln(-\sin t + \sin t_0 - e^{-y_0})\ . \end{aligned}$$

ii) Hier liegt eine Bernoulligleichung mit $\alpha = \frac{1}{2}$ vor. Dementsprechend substituieren wir (**G21**) $z = y^{\frac{1}{2}}$ und erhalten:

$$z' = \frac{1}{2\sqrt{y(t}} y'(t) \;\Rightarrow\; y'(t) = 2z'(t)z(t)\ .$$

Die urpsrüngliche Gleichung geht über in

$$2z'z = 2\frac{z^2}{t} + tz$$

oder

$$z' = \frac{z}{t} + \frac{t}{2}$$

mit $z(1) = 1$. Es handelt sich hier um eine lineare DGL. Wir bestimmen zuerst eine Lösung der homogenen DGL mittels Trennung der Variablen und erhalten $z(t) = ct$. Jetzt machen wir den Ansatz $\psi(t) = c(t)t$. Wir erhalten dann folgende Differentialgleichung für $c(t)$:

$$c'(t)t = \frac{t}{2}\ .$$

Somit ist $c(t) = \frac{t}{2}$ eine mögliche Lösung. Für ψ erhalten wir

$$\psi(t) = \frac{t^2}{2}\ .$$

Die Lösung der DGL für z ist gegeben durch

$$z(t) = ct + \frac{t^2}{2}\ .$$

Die Konstante c erhält man aus der AB $z(1) = 1 \Rightarrow\ c = \frac{1}{2}$. Damit ist die Lösung

$$\begin{aligned} z(t) =& \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} \\ \Rightarrow\ y(t) =& \frac{1}{4}(t + t^2)^2 \quad \forall t > 0\ . \end{aligned}$$

H17 (Exakte DGLn)

i) Setze $h(t,y) = \frac{y}{t} + \frac{1}{1+t^2}$ und $g(t,y) = 2 + \ln t$. Dann gilt $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{t} = \frac{\partial g}{\partial t}$. Also ist die DGL exakt. Wir bestimmen die Potentialfunktion durch Integration über t und y und die dabei auftretenden Integrationskonstanten.

$$\begin{aligned} S(x,y) =& \int \frac{y}{t} + \frac{1}{1+t^2}\, dt + c_1(y) = y \ln|t| + \arctan t + c_1(y) \\ \stackrel{!}{=}& \int 2 + \ln t\, dy + c_2(t) = 2y + y\ln t + c_2(t) \\ \Rightarrow\ S(x,y) =& y \ln t + \arctan t + 2y \end{aligned}$$

Aus der impliziten Lösung $S(t,y) = S(t_0,y_0)$ erhalten wir eine explizite Lösung

$$y \ln t + \arctan t + 2y = y_0 \ln t_0 + \arctan t_0 + 2y_0$$

ii) Setze $h(t,y) = y$ und $g(t,y) = t(2ty - 1)$. Dann gilt $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{t} = 1 \neq 4ty - 1\frac{\partial g}{\partial t}$. Also ist die DGL nicht exakt.Allerdings kann man den integrierenden Faktor $M(t) = -\frac{1}{t^2}$ erraten. Die DGL

$$M(t)h(t,y) + M(t)g(t,y)y' = 0$$

ist exakt.Wir bestimmen die Potentialfunktion durch Integration über t und y und die dabei auftretenden Integrationskonstanten.

$$\begin{aligned} S(x,y) =& \int -\frac{y}{t^2}\, dt + c_1(y) = \frac{y}{t} + c_1(y) \\ \stackrel{!}{=}& \int -2 + \frac{1}{t}\, dy + c_2(t) = 2y + \frac{y}{t} + c_2(t) \\ \Rightarrow\ S(x,y) =& 2y + \frac{y}{t} \end{aligned}$$

Aus der impliziten Lösung $S(t,y) = S(t_0,y_0)$ erhalten wir eine explizite Lösung

$$2y + \frac{y}{t} = 2y_0 + \frac{y_0}{t_0}$$

H18 (Hund)

i) Wir stellen die Bewegungsgleichung des Hundes auf:

$$x' = \underbrace{-\frac{x}{||x||}v_1}_{1.} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}}_{2.} \ .$$

Der erste Term steht hier für den Geschwindigkeitsanteil in Richtung des Herrchens und der zweite Term für den Abtrieb durch den Fluß. Hieraus bestimmen wir die DGL der Bahn, wie folgt:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2}{dt}\frac{dt}{dx_1} = \frac{\frac{-v_1 x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - v_0}{\frac{-v_1 x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}} = \frac{x_2}{x_1} - \frac{v_0}{v_1}\sqrt{1+(\frac{x_2}{x_1})^2} \ .$$

Diese DGL lösen wir mit Hilfe der Substitution $z = \frac{x_2}{x_1}$. Beachte $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{d(zx_1)}{dx_1} = z + x_1\frac{dz}{dx_1}$.

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} =& z + x_1\frac{dz}{dx_1} = z - \frac{v_0}{v_1}\sqrt{1+z^2} \\ \Rightarrow \frac{dz}{dx_1} =& -\frac{v_0}{v_1 x_1}\sqrt{1+z^2} \end{aligned}$$

Mittels Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} =& -\frac{v_0}{v_1}\frac{dx_1}{x_1} \\ \operatorname{arsinh} z - \operatorname{arsinh} z_0 =& -\frac{v_0}{v_1}\ln\frac{x_1}{x_0} \qquad (\text{ Vorsicht! } x_0 \text{ AW, } x_1 \text{ Komponente}) \\ z =& \sinh(-\frac{v_0}{v_1}\ln\frac{x_1}{x_0} + \operatorname{arsinh} z_0) \\ x_2 =& x_1 \sinh(-\frac{v_0}{v_1}\ln x_1) = x_1\sinh(\ln x_1^{-\frac{v_0}{v_1}}) = \frac{1}{2}x_1(x_1^{-\frac{v_0}{v_1}} - x_1^{\frac{v_0}{v_1}}) \end{aligned}$$

ii) $x_2 = \frac{1}{2}(x_1^{1-\frac{v_0}{v_1}} - x_1^{1+\frac{v_0}{v_1}})$

1. Fall $v_1 > v_0$: Wir erhalten für $x_1 = 0$ $x_2(0) = 0$. Das bedeutet, dass der Hund sein Herrchen erreicht.
2.Fall $v_1 = v_0$: Wir erhalten als Bahn $x_2 = -\frac{1}{2}(x_1^2 - 1)$. Daher kommt der Hund an der Stelle $x_2 = 1$ am Ufer an und muß noch etwas laufen.
3.Fall $v_1 < v_0$:Wir erhalten $\lim_{x_1\to 0} x_2 = \lim_{x_1\to 0}\frac{1}{2}(x_1^{1-\frac{v_0}{v_1}} - x_1^{1+\frac{v_0}{v_1}}) = \infty$. Der Hund wird abgetrieben und erreicht weder sein Herrchen noch das Ufer.
(Keine Angst. In den unveröffentlichen Nebenbedingungen existiert ein tierliebendes Team der Wasserschutzpolizei mit hinreichend Ps-starkem Motorboot, sodass stets $v_{Boot} > v_0 > v_1$.)

H* (Das große Krabbeln)

i) Zu jedem Zeitpunkt t gehen die Positionen der Käfer unter $\frac{\pi}{2}$-Rotationen um den Mittelpunkt in Positionen über (Invarianz unter $\frac{\pi}{2}$-Rotation).
$\Rightarrow$ Die Käfer befinden sich zu jedem Zeitpunkt auf den Ecken eines (schrumpfenden) Quadrats.
Beachte

$$x_i'(t) = \frac{x_{i+1}(t) - x_i(t)}{||x_{i+1}(t) - x_i(t)||} \quad || \quad \text{entsprechende Seite des Quadrats} \ .$$

$\Rightarrow \ \angle(x_i, x_i') = \frac{\pi}{4}$.

ii) Wir notieren die Position des i-ten K¨fers in der komplexen Ebene $x_i(t) = r(t)e^{\phi_i(t)}$. Die Bewegungsgleichung lautet

$$x'(t) = r'(t)e^{i\phi_i(t)} + r(t)i\phi_i'(t)e^{i\phi_i(t)} = ve^{i(\frac{3\pi}{4}+\phi_i(t))} \ .$$

Zusammen mit der Änderung des Abstands zum Nullpunkt

$$r'(t) = -v\cos\frac{\pi}{4} = v\cos\frac{3\pi}{4}$$

und der daraus resultierenden Lösung

$$r(t) = vt\cos\frac{3\pi}{4} + r_0$$

erhalten wir hieraus eine DGL für den Winkel $\phi_i(t)$; beachte, daß $e^{i\phi_i(t)} \neq 0,\ \forall t$.

$$\begin{aligned}
r'(t) + r(t)i\phi_i'(t) =& ve^{i\frac{3\pi}{4}} \\
\phi_i'(t) =& \frac{ve^{i\frac{3\pi}{4}} - r'(t)}{ir(t)} = \frac{ve^{i\frac{3\pi}{4}} - v\cos\frac{3\pi}{4}}{i(vt\cos\frac{3\pi}{4} + r_0)} \\
\phi_i'(t) =& \frac{v\sin\frac{3\pi}{4}}{vt\cos\frac{3\pi}{4} + r_0} \\
\text{Tr. d. Var.} \Rightarrow \quad \phi_i(t) =& \tan\frac{3\pi}{4}\ln\left(\frac{vt\cos 3\pi 4 + r_0}{r_0}\right) - \phi_{i,0} = -\ln\left(\frac{vt\cos\frac{3\pi}{4} + r_0}{r_0} - \phi_{i,0}\right)
\end{aligned}$$

In Polarkoordinaten erhalten wir so die Lösung

$$(r(t), \phi(t)) = (vt\cos\frac{3\pi}{4} + r_0, -\ln(\frac{vt\cos\frac{3\pi}{4} + r_0}{r_0}) - \phi_{i,0}).$$

iii) Wir erhalten aus ii)

$$t(\phi_i) = \frac{r_0}{v\cos\frac{3\pi}{4}}(e^{-(\phi_i - \phi_{i,0})} - 1)\ .$$

Einsetzen in $r(t)$ liefert

$$r(\phi_i) = r_0 e^{\phi_{i,0}} e^{-\phi_i}\ .$$

Das ist eine logarithmische Spirale. Nun zur Länge der Bahn. In Polarkoordinaten berechnet sich die Bahnlänge zwischen zwei Winkeln durch

$$L = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)}\, d\phi\ .$$

In unserem Fall ergibt dies ($r = r'$)

$$L = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{2} r(\phi)\, d\phi = -\sqrt{2} r_0 e^{\phi_{i,0}} e^{-\phi}\Big|_{\phi_1}^{\phi_2}$$

Wir erhalten die Länge der gesamten Bahn aus

$$\lim_{\phi_2 \to \infty} -\sqrt{2} r_0 e^{\phi_{i,0}} e^{-\phi}\Big|_{\phi_{i,0}}^{\phi_2} = \sqrt{2} r_0 = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1\ .$$