Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
19.12.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

5. Übung

G17 (Lipschitz-Stetigkeit)

i) $|f(t,x-f(t,y)| = |t^2 - t^2| = 0 \ \Rightarrow f$ ist Lipschitz-stetig.
ii) $|f(t,x-f(t,y)| = |x^2 - y^2| = |x+y||x-y| \ \Rightarrow f$ ist nur lokal Lipschitz-stetig.
iii) $|f(t,x-f(t,y)| = e^t|x-y| \ \Rightarrow f$ ist nur lokal Lipschitz-stetig.

G18 (Eindeutigkeit und globale Lösungen)
Wir reduzieren die Ordnung $y_1(t) = y(t)$, $y_2(t) = y'(t)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} y_1'(t) =& y_2(t) \\ y_2'(t) =& -y_1(t) + t = f(t, y_1(t), y_2(t)). \end{aligned}$$

Also erhalten wir $\tilde{f} = (y_2, -y_1 + t)^t$. $\tilde{f}$ ist lokal Lipschitz-stetig da f lokal Lipschitz-stetig ist, $||\tilde{f}(t,x_1,x_2) - \tilde{f}(t,y_1,y_2)|| = ||\begin{pmatrix} x_2 - y_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t,x_1,x_2) - f(t,y_1,y_2) \end{pmatrix}|| \leq |x_2 - y_2| + |f(t,x_1,x_2) + f(t,y_1,y_2)|$.
Beachte, dass hier $t_0 = 0$ und $x_0 = (y(0), y'(0))^t = (0,1)^t$ Wir verwenden die Bezeichnung aus der Vorlesung: Wähle $a = b > 0$ mit $K := [t_0 - b, t_0 + b] \times \overline{K_a(x_0)}$. Auf K gilt $||\tilde{f}(t, y_1(t), y_2(t))|| \leq |y_2| + |f(t,y_1,y_2)| \leq |b+1| + |-(-b) + b| \leq 3b + 1 =: M$ für alle $(t,x) \in K$. Für $b > 0$ und $s := \min(b, \frac{b}{M}) = \min(b, \frac{1}{3b+1})$ liefert Ex.&Eind.satz von Picard-Lindelöff die Existenz einer eindeutigen Lösung. Wähle zum Beipsiel $b = 1$. Das liefert $s = \frac{1}{4}$.

G19 (Banachscher Fixpunktsatz)

i) Wir betrachten:

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |x - y + \arctan(x) - \arctan(y)| = \phi'(\xi)|x-y|, \text{ für ein } \xi \in]x,y[$$

Beachte $\phi'(x) = 1 - \arctan'(x) = 1 - \cos^2(\arctan x)$ und $\phi'(x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, da $\cos^2(\arctan x)) \neq 0$. Daher erfüllt ϕ die Ungleichung. Angenommen es gäbe einen Fixpunkt x_0. Dann würde $\phi(x_0) = x_0 - \arctan x_0 + \frac{\pi}{2} = x_0$ gelten, woraus $\arctan x_0 = \frac{\pi}{2}$ folgt, was nicht sein kann.

ii)

G20 (Picard-Iteration)

i) a):
Beachte, dass hier $t_0 = 0$ gilt. Wir verwenden die Bezeichnung aus der Vorlesung: Wähle $a = b > 0$ mit $K := [-b, b] \times \overline{K_a(x_0)}$. Auf K gilt $|f(t,x)| = |x(t)| \leq b + |x_0| =: M$ für alle $(t,x) \in K$. Für $b > 0$ und $s := \min(b, \frac{b}{M}) = \min(b, \frac{b}{b+|x_0|})$ liefert Ex.&Eind.satz von Picard-Lindelöff gleichmässige Konvergenz der Iterationsfolge auf $[-s,s]$. Wähle zum Beipsiel $b = 1$.
Die Picard-Iteration liefert nun:

$$\begin{aligned} x_0(t) \equiv& x(0) = x_0 \\ x_1(t) =& x_0 + \int_0^t x_0 \, ds = (1+t)x_0 \\ x_2(t) =& x_0 + \int_0^t (1+s)x_0 \, ds = (1 + t + \frac{t^2}{2})x_0. \end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} x_0 \tag{*}$$

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{t}{k!} x_0 \, ds = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!},$$

d.h., (*) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} x_0 = e^t x_0$$

b):
Beachte, dass hier $t_0 = 0$ und $y_0 = 0$ gilt. Wir verwenden die Bezeichnung aus der Vorlesung: Wähle $a = b > 0$ mit $K := [-b, b] \times \overline{K_a(y_0)}$. Auf K gilt $|f(t, y) = ty(t) + t^3| = |ty + t^3| \leq b^2 + b^3 =: M$ für alle $(t, x) \in K$. Für $b > 0$ und $s := \min(b, \frac{b}{M}) = \min(b, \frac{1}{b(1+b)})$ liefert Ex.&Eind.satz von Picard-Lindelöff gleichmässige Konvergenz der Iterationsfolge auf $[-s + t_0, s + t_0]$. Wähle zum Beipsiel $b = 1$. Das liefert $t_0 = \frac{1}{2}$.
Die Picard-Iteration liefert nun

$$\begin{aligned} y_0(t) \equiv& 0 \\ y_1(t) =& y_0 + \int_0^t s y_0(s) + s^3 \, ds = 0 + \frac{s^4}{4}|_0^t = \frac{t^4}{4} \\ y_2(t) =& \int_0^t s\frac{s^4}{4} + s^3 \, ds = \frac{t^6}{4 \cdot 6} + \frac{t^4}{4} \end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir

$$\begin{aligned} y_n(t) =& \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{4 \cdot 6} + \cdots + \frac{t^{2n+2}}{4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \qquad (*) \\ y_{n+1}(t) =& \int_0^t s^3 + \frac{s^5}{4} + \frac{s^7}{4 \cdot 6} + \cdots + \frac{s^{2n+3}}{4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \, ds = \frac{t^4}{4} + \cdots + \frac{t^{2n+4}}{4 \cdot 6 \cdots (2n+4)} \end{aligned}$$

d.h., (*) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. D.h. (Hinweis!)

$$\begin{aligned} y(t) =& \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^{k-1} k!} 02 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} (\frac{t^2}{2})^k \\ =& 2(-1 - \frac{t^2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\frac{t^2}{2})^k \\ y(t) =& -2 - t^2 + 2e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

ii) a)& b)Man rechnet direkt nach, dass $x(t)$ bzw. $y(t)$ eine Lösung ist, und da die Potenzreihe für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergiert, ist $x(t)$ $(y(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ Lösung.

H13 (Lineare DGLen) 4 Punkte

i) Es sei $\phi(t) : [-r, r] \to \mathbb{R},\ r > 0$ eine Lösung der DGL und $\psi : [-r, r] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi(t) = \phi(-t) \quad \text{fr alle } t \in [-r, r].$$

Dann ist auch $\psi(t)$ eine Lösung der DGL, denn

$$\begin{aligned} \psi'(t) =& (\phi(t))' = -\phi'(-t) = -f(-t, \phi(-t)) \\ =& f(t, \phi(-t)) = f(x, \psi(x)). \qquad \text{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Nach Vors. ist f lokal Lipschitz-stetig. Da $\phi(0) = \psi(0)$, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz $\phi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in [-r, r]$. 1 Punkt

ii) Sei $\phi(t)$ Lösung von $x'(t) = g(x(t))$, $x(0) = 0$ auf $(-r, r)$. Setze $\psi(t) := -\phi(-t)$. Dann ist

$$\psi'(t) = -\phi'(t) \cdot (-1) = \phi'(-t) = g(\phi(-t)) = g(-\phi(-t)) = g(\psi(t)), \qquad \text{(1 Punkt)}$$

also löst $\psi(t)$ das AWP $x'(t) = g(x(t)), x(0) = 0$.
Da die Lösungen eindeutig sind, folgt $\psi(t) = \phi(t)$. 1 Punkt

H14 (Lösungen linearer DGLen) 4 Punkte

Wir setzen $x(t) = y(t) - \frac{1}{2}K$. 1 Punkt
Dann ist also $y(t) = x(t) + \frac{1}{2}K$ und

$$\begin{aligned} x'(t) = y'(t) =& \alpha y(t)(K - y(t)) = \alpha(x(t) + \frac{1}{2}K)(K - x(t) - \frac{1}{2}) \\ \Rightarrow \; x'(t) =& \alpha(\frac{1}{2}K + x)(\frac{1}{2}K - x) = \alpha(\frac{K^2}{4} - x^2) =: F(x) \end{aligned} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Da $F(x) = F(-x)$ gilt, liefert H13 ii) $x(t) = -x(-t)$, 1 Punkt
also

$$p(-t) = x(-t)\frac{1}{2}K = -x(t) + \frac{1}{2}K = -(y(t) - \frac{1}{2}K) + \frac{1}{2}K = K - y(t). \qquad \text{(1 Punkt)}$$

H15 (Potenzreihenmethode) 4 Punkte

i) Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ stellt im Innern ihres Konvergenzkreises $\{t : \; |t| < \rho\}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion $x(t)$ dar, und die Ableitungenerhält man durch gliedweise Differentiation: $x'(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^n$, $x''(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^{n-2}$, etc. In $x''(t) - tx = 0$ eingesetzt, erhalten wir

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}t^{n+1}.$$

d.h.

$$\begin{aligned} 0 =(\quad & 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2a_3t && +4 \cdot 3a_4t^2 && +5 \cdot 4a_5t^3 && + \cdots) \\ -(\quad & a_0t && +a_1t^2 && +a_2t^3 && + \cdots) \end{aligned}$$

Formal: $0 = 2a_2 + \sum_{j=1}^{\infty}((j+2)(j+1)a_{j+2} - a_{j-1})t^j$. Wegen $\sum_{n=0} b_n t^n = 0 \;\Leftrightarrow\; (\forall n \in \mathbb{N}) \; b_n = 0$ (Identitätssatz für PR) folgt: a_0, a_1 beliebig, $a_2 = 0$ und $a_{n+3} = \frac{1}{(n+3)(n+2)}a_n$ für alle $n \leq 0$.
Das AWP hat also die Lösung :

$$\begin{aligned} x(t) =& \alpha(1 + \frac{1}{3 \cdot 2}t^3 + \frac{1}{6 \cdot 5}\frac{1}{3 \cdot 2}t^6 + \cdots) + \beta(t + \frac{1}{4 \cdot 3}t^4 + \frac{1}{7 \cdot 6}\frac{1}{4 \cdot 3}t^7 + \cdots) \\ =:& \alpha \sum_{n=0}^{\infty} b_{3n}t^{3n} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} d_{3n+1}t^{3n+1}. \end{aligned} \qquad \text{(2 Punkte)}$$

ii) Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{3n+3}}{c_{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+3)3n+2)} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{d_{3n+4}}{d_{3n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+4)3n+3)} = 0$$

konvergieren beide Reihen für <u>alle</u> $t \in \mathbb{R}$, d.h., $\rho = \infty$. 2 Punkte

Wir wünschen Euch frohe Festtage und ein gutes Neues Jahr!