Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
05.12.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

4. Übung

G13 (Spezielle Lösung)
Wir differenzieren $x(t) = \Phi(t)u(t)$:

$$x'(t) = \Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) = A\Phi(t)u(t) + \Phi(t)\Phi^{-1}b(t) = Ax(t) + b(t) \ .$$

Beachte $u'(t) = (\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1} f(s)\, ds)' = \Phi(s)^{-1}b(s)$. Daher ist $x(t)$ eine Lösung der DGL.

G14 (Lineare DGLen)

i) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. A hat EWe $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 7$ und EVen $v_1 = (-2, 1)^t$ und $v_2 = (1, 3)^t$. D.h. die Spalten von $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -2 & e^{7t} \\ 1 & 3e^{7t} \end{pmatrix}$ sind ein Fundamentalsystem. Nun zur speziellen Lösung $x_i(t) = \Phi(t)u(t)$ (siehe G16).

$$\begin{aligned} u(t) =& \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) \begin{pmatrix} s \\ \sin s \end{pmatrix} ds \\ =& \int_0^t \begin{pmatrix} -\frac{3}{7}s + \frac{1}{7}\sin s \\ \frac{1}{7}te^{-7s} + \frac{2}{7}e^{-7s}\sin s \end{pmatrix} ds \\ =& \begin{pmatrix} -\frac{3}{14}t^2 - \frac{1}{7}\cos t + \frac{1}{7} \\ -\frac{-175x - 25 - 49\cos x - 343\sin x}{8575}e^{-7t} + \frac{74}{8575}) \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

Daher erhalten wir $x_i(t) = \Phi(t)u(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}t^2 - \frac{1}{49}t - \frac{99}{343} + \frac{7}{25}\cos t - \frac{1}{25}\sin t + \frac{74}{8575}e^{7t} \\ -\frac{3}{14}t^2 - \frac{3}{49}t + \frac{46}{343} - \frac{4}{25}\cos t - \frac{3}{25}\sin t + \frac{222}{8575}e^{7t} \end{pmatrix}$.

ii) Lösungen des charakteristischen Polynoms ist $\lambda = 1$. Das bedeutet $x_h(t) = ce^t$ ist homogene Lösung. $x_i = e^t \int_0^t e^{-s} \sinh s\, ds = e^t(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4})) = \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}(e^{-t} - e^t) = \frac{1}{2}(te^t - \sinh t)$. Die allgemeine Lösung ist dann von der Form $x(t) = x_h(t) + x_i(t)$.

G15 (System 2.Ordnung)

i) Setzte $\phi(t) = (x(t), x'(t), y(t), y'(t))^t$. Mittels Reduktion der Ordnung erhalten wir:

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & 0 & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & 0 \end{pmatrix} \phi(t)$$

ii) $x(t) = -c_1e^{2it} + c_2e^{-2it} + c_3e^{it} + c_4e^{-it}$ und $y(t) = c_1e^{2it} - c_2e^{-2it} + 2c_3e^{it} + 2c_4e^{-it}$

iii)

G16 (Inhomogene DGLen)

i) Sei $\phi(t) = e^{\mu t}$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \phi^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mu^k \phi(t) \ .$$

Setze $x_i(t) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k \mu^k}\phi(t)$. Dann ist $\phi(t)$ spezielle Lösung der DGL und $\alpha = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k \mu^k}$.

ii) Wir betrachten zuerst die DGL

$$y^{(3)}(t) - 2y^{(2)}(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 2ie^it \ .$$

Nach i) ist $\phi(t) = \frac{-2}{\sum_k a_k i^k} e^{it} = \frac{-2}{4-3i} e^{it} = \frac{6-8i}{25} e^{it}$ eine Lösung. Da $\Re(\sum_k a_k \phi(t)) = \sum_k a_k \Re(\phi(t))$ besitzt unsere DGL die spezielle Lösung $x_i(t)\Re(\phi(t)) = \frac{6}{25}\cos t + \frac{8}{25}\sin t$.

H10 (Lineare DGLen) 4 Punkte

i) Allgemeine Lösung der homogenen DGL $x_h(t) = c_1 e^{it} + c_2 te^{it} + c_3 e^{-it} + c_4 te^{-it}$. 1 Punkt
Spezielle Lösung mittels G15; $\sum_{k=0}^{2} a_k \mu^k 16 + 8 + 1 = 25$, daher $x_i(t) = \frac{25}{25} e^{2t} = e^2 t$. Allgemeine Lösung $x(t) = x_h(t) + x_i(t)$. 1 Punkt

ii) Allgemeine homogene Lösung $x_h(t) = c_1 e^{(2+\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{7} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{(2-i\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} 1-i\sqrt{7} \\ 1 \end{pmatrix}$ und reell $x_{hr} t = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} (\cos(\sqrt{7}t) - \sqrt{7}\sin(\sqrt{7}t) \\ \cos(\sqrt{7}t) \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{7}t) + \sqrt{7}\cos\sqrt{7}t \\ \sin(\sqrt{7}t) \end{pmatrix}$. 1 Punkt
Jetzt die spezielle Lösung $x_i(t)$ entweder mit furchtbarer Rechnung mittels Variation der Konstanten oder durch genaues Hinschauen: $x_i(t) = \frac{1}{11}(-1,1)^t$. Die allgemeine Lösung ist $x(t) = x_{hr}(t) + x_i(t)$. 1 Punkt

H11 (Lösungen linearer DGLen) 4 Punkte

i) Sei $b(t)$ spezielle Lösung der DGL mit $b(0) = 0$. Da alle Lösugen der DGL ein affiner Teilraum sind, kann ich jede Lösung als Kombination einer homogenen Lösung und dieser speziellem schreiben. Daher ist $x(t) = e^{at}x(0) + b(t)$ und $y(t) = e^{At}y(0) + b(t)$. 1 Punkt

ii) $||x(t) - y(t)|| = ||e^{at}x(0) + b(t) - e^{At}y(0) + b(t)|| = ||e^{at}x(0) - e^{At}y(0)|| \le ||x(0) - y(0)||||e^{At}||_{op}$. 1 Punkt

iii) Wenn A nur Eigenwert mit negativem Realteil besitzt, gilt $\lim_{t\to\infty} ||e^{At}|| = 0$ und daher wegen i) $\lim_{t\to\infty} ||x(t) - y(t)|| = 0$. Das bedeutet aber $\lim_{t\to\infty} x(t) - y(t) = 0$. 2 Punkte

H12 (Fast-invariante Funktionen) 4 Punkte

i) 1. Polynome $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
2. Exponentialfkt. $f(x) = e^{\alpha x},\ \alpha \in \mathbb{R}$
3. Trigonometrische Fkt.$\sin(\omega x), \cos(\omega x),\ \omega \in \mathbb{R}$
4. Produkte von Funktionen vom Typ 1-3

Sei $L(y) = y' + ay,\ a \in \mathbb{R}$ konstant. Gebe einige Klassen von fast- L-invarianten Funktionen an.

ii) Sei f fast-L-invariant. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $V(f) = span\{f, L(f), \dots, L^N(f)\}$ da $\dim V(f) < \infty$. Nun sei $\tilde{N}$ minimal mit dieser Eigenschaft. Wir behaupten, dass $f, L(f), \dots, L^{\tilde{N}}(f)$ linear unabhängig sind.
Annahme: $f, , L(f), \dots, L^{\tilde{N}}$ sind lin. abh.
$\Rightarrow \quad (\exists k \le \tilde{N}) \quad L^k(f) \in span\{f, \dots, L^{k-q}(f)\}$ Da $\tilde{N}$ minimal gewählt war, muß $k < \tilde{N}$ sein. Aber dann ist $L^{\tilde{N}}(f) = L^{\tilde{N}-k}(L^k(f)) \in span\{L^{\tilde{N}-k}(f), \dots, L^{\tilde{N}-1}(f)\}$, da L linear ist. Widerspruch ! Also sind $f, L(f), \dots, L^{\tilde{N}}(f)$ lin. unabh.

iii) $\Rightarrow$:Sei f fast-L-invariant.
Nach ii) existiert ein N, sodaß $span\{f, L(f), \dots, L^n(f) :\ n \in \mathbb{N}_0\} = span\{f, L(f), \dots, L^N(f)\} =: V_N(f)$. Für $V_N(f)$ gilt natürlich $f \in V_N(f)$. Wir zeigen jetzt, dass auch $L(V_N(f)) \subseteq V_N(f)$ gilt. Angenommen es gelte $L(V_N(f)) \subset V_N(f)$, dann existiert eine Funktion $g \in L(V_N(f))$ mit $g \in V_{N+1}(f)$, aber $g \notin V_N(f)$. Wir folgern $V_N(f) \subset V_{N+1}(f) \subseteq span\{f, L(f), \dots, L^n(f) :\ n \in \mathbb{N}_0\}$. Widerspruch!
$\Leftarrow$:Sei $V \subset C^\infty(\mathbb{R})$ endlich-dimensionaler Vektorraum mit $L(V) \subseteq V$ und $f \in V$.
Mittels Induktion sieht man, $L^n(V) \subseteq V$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und insbesondere $L^n(f) \in V$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$. Daher gilt $span\{f, L(f), \dots, L^n(f) :\ n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq V$, also $\dim span\{f, L(f), \dots, L^n(f) :\ n \in \mathbb{N}_0\} \le \dim V < \infty$.

iv) Da L linear ist, ist $V(f+g) \subset V(f) + V(g)$. Somit folgt die erste Behauptung.
Nun sei $\dim V(f) < \infty$ und $V(f) \cap \ker L = \{0\}$. Dann ist die Einschränkung $L :\ V(f) \to V(f)$ injektiv. Wegen $\dim V(f) < \infty$ ist sie also auch surjektiv. Da $f \in V(f)$ gibt es also ein eindeutiges $y \in V(f)$ mit $L(y) = f$.

v) Hier ist $V(f) \subseteq span\{1, x, \ldots, x^6\} \cong \mathbb{R}^7$ und $V(F) \cap \ker(L) = \{0\}$, da $\ker(L) = \mathbb{R} \cdot e^{-x}$. Mit $y_p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_6 x^6 \mathrel{\widehat{=}} (a_0, \ldots, a_6)^t \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$L(y_p) = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 4a_4 \\ 5a_5 \\ 6_a 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ a_6 = 1, a_5 = -6a_6 = -6, a_4 = -5a_5 = 30, a_3 = -4a_4 = -120, a_2 = -3a_3 = 360, a_1 = -2a_2 = 720$ und $a_0 = -a_1 = -720$, d.h.

$$y_p(x) = x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 + 720x - 720\ .$$

vi)

Punkte: Für jede richtige Antwort zu einer der fünf Unteraufgaben i)-v) gibt es 1 Punkt, d.h. also, 5× richtig= 4.