Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
20.11.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

3. Übung

G09 (Linerae DGln)

Von oben nach unten: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$// $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$// $0 < \lambda_1 < \lambda_2$// $\lambda < 0$// $\lambda > 0$// $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$// $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$// $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$// Jordan $\lambda < 0$// Jordan $\lambda > 0$// Jordan $\lambda = 0$// $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a < 0, b > 0$// $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a < 0, b < 0$// $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, $b > 0$,

G10 (Jordan)

1. $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$
2. Hauptvektor-Basis:
   $\lambda_{1,2} = 1 :\ (A - \mathbb{1})v_1 = 0 \ \Rightarrow\ v_1 = (1, 1, 0)^t$.
   Bestimme Hauptvektor $(A - E)^2 v_2 = 0 \ \Rightarrow\ v_2 = (0, 0, -1)^t$
   $\lambda_3 = 2 :\ (A - 2\mathbb{1})v_3 = 0 \ \Rightarrow\ v_3 = (0, 1, 1)$
3. Allgemeine Lösung: $x(t) = c_1 e^t v_1 + c_2 e^t (v_2 - t v_1) + c_3 e^{2t} v_3$

G11 (Gedämpfter Oszillator)

$y''(t) + y(t) = f(t)$ wird zu

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \cos s & \sin s \\ -\sin s & \cos s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds \right] \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} -\int_{t_0}^t \sin s f(s)\, ds \\ \int_{t_0}^t \cos s f(s)\, ds \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Insbesondere ist also

$$\begin{aligned} y(t) = x_1(t) &= \cos t y(t_0) + \sin t y'(t_0) - \cos t \int_{t_0}^t f(d) \sin s\, ds + \sin t \int_{t_0}^t f(s) \cos s\, ds \\ &= \cos t[y(t_0) - \int_{t_0}^t f(s) \sin s\, ds] + \sin t[y'(t_0) + \int_{t_0}^t f(s) \cos s\, ds. \end{aligned}$$

G12 (Asymptotisches Verhalten)

Nehmen wir vorerst an A sei diagonalisierbar. Dann wählen wir eine Basis aus Eigenvektoren $b_1, \ldots, b_n$ und nennen den jeweiligen Eigenraum zum EW λ_k E_{λ_k}. Wir zerlegen $x(t)$ bezüglich der E_λ, $x(t) = \sum_k x_k(t) b_k$. Gilt jetzt $x_k(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, gilt für alle $t > t_0$ $x_k(t) \neq 0$ und insbesondere $x_k(t) = e^{A(t-t_0)} x_k(t_0) = e^{\lambda(t-t_0)} x_k(t_0)$. Wir unterscheiden jetzt drei Fälle.

Fall 1:
$x(t_0)$ besitzt einen Anteil $x_k(t_0)$ am Eigenvektor v_k mit $\Re(\lambda_k) > 0$. Dann gilt $\lim_{t\to\infty} ||x(t)|| \geq \lim_{t\to\infty} ||x_k(t)|| = \lim_{t\to\infty} ||e^{\Re(\lambda_k)(t-t_0)} e^{i\Im(\lambda_k)(t-t_0)} x_k(t_0)| = \lim_{t\to\infty} |e^{\Re(\lambda_k)(t-t_0)}|\, ||x_k(t_0)|| = \infty$

Fall 2:
$x(t_0)$ besitzt einen Anteil $x_k(t_0)$ am Eigenvektor v_k mit $\Re(\lambda_k) = 0$. Dann gilt $||x_k(t)|| = ||x_k(t_0)||$. Das bedeutet $\lim_{t\to\infty} ||x(t)|| = \infty$ nur dann, wenn $x(t)$ weitere Anteile an mindestens einem Eigenvektor v_i mit $\Re(\lambda) > 0$

besitzt.

Fall 3:

$x(t_0)$ besitzt einen Anteil $x_k(t_0)$ am Eigenvektor v_k mit $\Re(\lambda)$ negativ. Dann gilt genauso $||x_k(t)|| = |e^{\Re(\lambda_k)}(t - t_0)|\,||x_k(t_0)||$. Daher gilt $\lim_{t\to\infty} ||x_k(t)|| = 0$, und $||x(t)|| \to 0$ nur dann, wenn $x(t_0)$ nur Anteile an Eigenvektoren v_i mit $\Re(\lambda) < 0$ besitzt.

Falls A nicht diagonalisierbar ist, kann man immer noch eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren bilden. Seien v_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ und $v_2, \dots, v_n$ Hauptvektoren. Für die Hauptvektoren gilt $e^{A(t-t_0)}v_n = e^{\lambda(t-t_0)}(v_n + tv_{n-1} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}v_1)$.
Da $e^{\lambda t}$ schneller wächst bzw. fällt als jedes Polynom $p(t)$ in t, wird das Verhalten von $e^{\lambda(t-t_0)}(v_n + tv_{n-1} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}v_1)$ für $t \to \infty$ durch $e^{\lambda(t-t_0)}$ bestimmt. Das bedeutet $e^{A(t-t_0)}v_k,\ k = 2, \dots, n$ verhält sich genauso wie $e^{\lambda(t-t_0)}v_1$ für den dazu gehörigen Eigenvektor v_1.

H07 (Lineares AWP)

Bestimme EWe und EVen. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \sqrt{2}, \lambda_3 = -\sqrt{2}$ und $v_1 = (1, -2, 0)^t$, $v_2 = (-1, 1, -\sqrt{2} + 1)$, $v_3 = (-1, 1, \sqrt{2} + 1)^t$. (2Punkte)
Die Allgemeine Lösung ergibt sich zu: $x(t) = c_1 e^t v_1 + c_2 e^{\sqrt{2}t} v_2 + 3e^{-\sqrt{2}t} v_3$. (1 Punkt)
Setze $t = 0$ und löse $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = (1, 1, \sqrt{(2)} - 1)^t$. $c_1 = -2, c_2 = -\sqrt{2}, c_3 = \sqrt{2} - 3$. (1 Punkt)

H08 (Translation) 4 Punkte

i) Wir wählen zunächst eine Basis für P_n $B := \{1, x, \dots, \frac{x^n}{n!}\}$. In dieser Basis hat die Differentation die Abbildungsmatrix

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass dann

$$e^{M_D t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^n}{n!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$ (1 Punkt)

Sei nun ein Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ bezüglich B gegeben $a = (a_0, 1!a_1, \dots, n!a_n)^t$, dann gilt

$$e^{M_D t} a = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n a_k \frac{k!}{k!} t^k \\ \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{k+1!}{k!} t^k \\ \vdots \\ (n-1)!a_{n-1} + n!a_n t \\ n!a_n \end{pmatrix} = a + tD(a) + \cdots + \frac{t^n}{n!} D^n(a).$$

Also $e^{Dt}p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} p^(k)(x)$. Das ist aber gerade die Taylorentwicklung von $p(x + t)$, $T(p(x + t)) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} p^(k)(x)$. (1 Punkt)

ii) Linearität ist für die Ableitung ja klar. Problem ist, ob die Ableitung eines Quasipolynoms wieder ein Quasiploynom ist. Sei $f \in \mathbb{Q}_n$. f ist also von der Form $f(x) = e^{\lambda x} p(x)$ mit $p \in P_n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$Df(x) = \lambda e^{\lambda x} p(x) + e^{\lambda x} p'(x) \ \in \ Q_n$$

$\Rightarrow \quad D: \ Q_n \to Q_n$

Wir wählen eine Basis $C := \{e^{\lambda x} b : \ \lambda \in \mathbb{K},\ b \in B\}$. Bezüglich der Basis C hat D die Abbildungsmatrix

$$M_D = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich somit $e^{Dt} = e^{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^n}{n!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$. (1 Punkt)

Angewendet auf f ergibt sich

$$e^{Dt} f(x) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^n}{n!} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda x} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ \frac{a_n}{n!} \end{pmatrix} = e^{\lambda(x+t)} p(x+t) = f(x+t).$$

H09 (Jeder Fluss genügt einer DGL) 4 Punkte

i) Für ϵ hinreichend klein folgt wegen Eigenschaft 3 $||\mathbb{1} - \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T_s\, ds||_{op} = ||\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T_0\, ds - \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T_s\, ds||_{op} = ||\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T_0 - T_s\, ds||_{op} \leq ||T_0 - T_\epsilon||_{op}||\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon ds = ||T_0 - T_\epsilon||_{op} < 1$. Daher folgt mit dem Satz zur Neumannschen Reihe $\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T_s\, ds$ ist invertierbar mit $(\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T_s\, ds)^{-1} = (\mathbb{1} - (\mathbb{1} - \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T_s\, ds))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ||\mathbb{1} - \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T_s\, ds||_{op}$ (1 Punkt)

ii) Aus i) folgt, dass auch $\int_0^\epsilon T_s\, ds$ invertierbar ist. Daher kann man, falls $\frac{T_h - \mathbb{1}}{h}\int_0^\epsilon T_s\, ds$ einen Grenzwert hat, darauf schließen, dass auch $\frac{T_h - \mathbb{1}}{h}\int_0^\epsilon T_s\, ds (\int_0^\epsilon T_s\, ds)^{-1} = \frac{T_h - \mathbb{1}}{h}$ einen Grenzwert besitzt. Das ist aber gerade die Ableitung an der Stelle $t = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{T_h - \mathbb{1}}{h}\int_0^\epsilon T_s\, ds &= \frac{T_h - T_0}{h}\int_0^\epsilon T_s\, ds = \int_0^\epsilon \frac{T_h - T_0}{h} T_s\, ds = \int_0^\epsilon \frac{T_{s+h} - T_s}{h}\, ds = \frac{\int_h^{\epsilon+h} T_s - \int_0^\epsilon T_s\, ds}{h} \\ &= \frac{\int_h^{\epsilon+h} T_s - \int_\epsilon^h T_s\, ds}{h} + \frac{\int_\epsilon^h T_s\, ds - \int_0^\epsilon T_s\, ds}{h} = \frac{\int_\epsilon^{\epsilon+h} T_s\, ds}{h} + \frac{\int_0^h T_s\, ds}{h} \end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert aber (Hauptsatz der Differential und Integralrechnung). Und damit existiert auch $(T_t)'|_{t=0} := \lim_{t\to 0} \frac{T_h - \mathbb{1}}{h}(T_t)'|_{t=0}$. (1 Punkte)

iii) Beachte $\lim_{h\to 0} \frac{T_{h+s} - T_s}{h} = \lim_{h\to 0} T_s \frac{T_h - T_0}{h} = T_s T_0'$. Daher ist T_t überall differenzierbar. (1 Punkt)

iv) Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ genügt $T_t x_0$ der linearen DGL $x'(t) = Ax(t)$. Vergleiche ii). Nach dem Hauptsatz über lineare DGLen sind Lösungen einer linearen DGL von der Form $x(t) = e^{At}x_0$ und daher $T_t x_0 = e^A t x_0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$. (1 Punkt)

v) Sei $x(t) = e^{Bt}x_0$, $B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $B \neq A$, sodass $e^{At}x_0 = e^{Bt}x_0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$, also $e^{At} = e^{Bt}$. Es folgt $A = (e^{At})' = (e^{Bt})' = B$. Das ist ein Widerspruch. Also kann es kein $B \neq A$ geben, sodass $T_t = e^{At} = e^{Bt}$.