Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
06.11.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

2. Übung

G05 (Lineare AWP)

Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. A hat Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ bzw. $\lambda_2 = -5$. Dann sind nach der Vorlesung Lösungen von der Form $x(t) = c_1 e^{-t} v_1 + c_2 e^{5t} v_2$. Um das Anfangswertproblem zu lösen, müssen wir die Konstanten c_1 und c_2 bestimmen. $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 1$

G06 (Exponentialmatrix)

i) Wähle $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $ST = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $S + T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. In der letzten Übung wurde gezeigt, dass $e^{S+T} = \begin{pmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$. Ausserdem ist $e^{ST} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$.

ii) Beachte $A^k = 0, \ \forall k \geq 2$, sowie $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B^k = 0, \ \forall k \geq 3. \Rightarrow \quad e^{tA} = \mathbb{1} + tA$ und $e^{tB} = \mathbb{1} + tB + \frac{t^2}{2!} B^2$.

iii) Wähle $S = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}$, dann gilt $S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} S = A$ (S bekommt man z.B. durch lösen des Gleichungssystems $S^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} S = A$). In der letzten Übung haben wir gezeigt $e^{S^{-1}AS} = S^{-1} e^A S$. Also

$$e^{tA} = S e^{t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} S^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\frac{1}{a} \sin t \\ a \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

G07 (Invariante Teilräume)

i) Sei $x \in E$, dann gilt $A^k x \in E, \ \forall k \in \mathbb{N}$. Daher gilt für die Partialsummen $S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \ S_n x \in E$. Damit auch für den Grenzwert. Nach der Vorlesung ist die Lösung einer Linearen DGL nun aber von der Form $x(t) = e^{At} x_0$ und damit $x(t) \in E$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

ii) Sei $G_A(t) = \frac{e^A - t\mathbb{1}}{t}$. Es gilt $\lim_{t \to 0} G_A(t) = A$, denn $\frac{1}{t}(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k}{k!} - \mathbb{1}) - A = \sum_{k=2}^{n} \frac{(tA)^k}{k!}$. Weiter finden wir für $x \in E$ und alle $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, dass $G_A(t) x \in E$, da $e^{At} x \in E$ und natürlich $\mathbb{1} x \in E$.

G08 (Symmetrie)

a.i) $y'(t) = Sx'(t) = SAx(t) = SAS^{-1}Sx(t) = SAS^{-1}y(t)$

b.i) Seien S, T Symmetrien. Dann gilt $f((ST)(x)) = Sf(T(x)) = (ST)f(x)$. Also ist ST wieder eine Symmetrie und die Menge der Symmetrien ist abgeschlossen unter Hintereinanderausführung. Assoziativität ist klar. Die identische Abbildung ist auch eine Symmetrie und insbesondere das Einselement. Ausserdem ist S^{-1} auch eine Symmetrie, da $f(S^{-1}(S(x)) = f(x) = (S^{-1}S)f(x) = S^{-1}f(S(x))$.

b.ii) Ist klar.

b.iii) Sei $x(t)$ eine Lösung. $ASx(t) = ASS^{-1}Sx(t) = SAS^{-1}Sx(t) = Sx'(t) = (Sx(t))'$.

b.iv) $\underline{\Rightarrow}$:Sei $x(t)$ stationäre Lösung. Dann ist auch $S(x(t))$ stationäre Lösung. Sei $x(t)$ nun periodische Lösung mit Periode T. Dann gilt $Sx(t+T) = Sx(t)$
$\underline{\Leftarrow}$:Sei $S(x(t)$ stationär, dann ist auch $S^{-1}(Sx(t)) = x(t)$ stationär. Sei $Sx(t)$ periodisch. Dann ist auch $S^{-1}(S(x(t)) = x(t)$ periodisch.

H04 (Lineare DGL) 4 Punkte

In der Basis aus Eigenvektoren ist Abbildungsmatrix durch $A_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Die Eigenvektoren kann man aus de Fundamentalsystem ablesen. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Transformationsmatrix ist daher $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und ihre Inverse $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Matrix A ist nun gegeben durch $A = SA_dS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

H05 (Exponentialmatrix) 4 Punkte

An.: Es existiert S entsprechend der Behauptung. Dann gilt $e^S = e^{\frac{1}{2}S}e^{\frac{1}{2}S}$. D.h., es gibt eine Matrix A, sodass $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Wir stellen das zugehörige Gleichungssystem auf. $A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{12}(a_{11} + a_{22}) \\ a_{21}(a_{11} + a_{22}) & a_{22}^2 + a_{12}a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Daher muß gelten:$a_{21} \neq 0, a_{12} \neq 0$ und deshalb $a_{11} = -a_{22}$. Daß bedeutet aber, $-1 = a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = a_{22}^2 + a_{12}a_{21} = -4$. Widerspruch.

H06 (Flüsse) 4 Punkte

i) $D\Phi(t) = De^{At} = e^{At} = \Phi(t)$ (Das gilt natürlich für alle linearen Abbildungen.) Die Volumenänderung ist gegeben durch $\det \Phi(t) = e^{tr(A)t}$.

ii) $\underline{a \Rightarrow b}$: Da A linear ist gilt $divA = \sum_i a_{ii} = trA$. Also folgt mit i), dass der Fluss volumenerhaltend ist. ($\det \Phi(t) = e^{tr(A)t} = 1$)
$\underline{b \Rightarrow a}$: Sei der Fluss volumenerhaltend, d.h., $\det \Phi(t) = e^{tr(A)t} = const.$ für alle t. Dann folgt aber $trA = 0 = divA$.