Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
24.10.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

1. Übung

G01

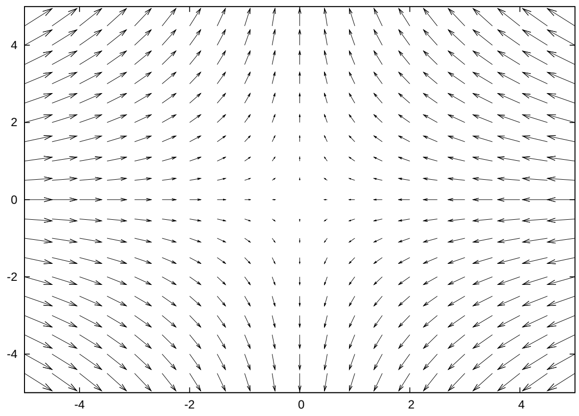

Abbildung 1:

G02 *(System von linearen DGLen)*
Einerseits gilt mit dem Ansatz $x' = \lambda e^{\lambda t} x_0$, andererseits ist $x' = Ax = e^{\lambda t} A x_0$, also $e^{\lambda t} A x_0 = \lambda e^t x_0$. D.h., λ ist EW von A zum Eigenvektor x_0.

G03 *(Vektorfelder und Richtungsfelder)*
Abb.1: Es gilt anscheinend für $x, y \in \mathbb{R}^2$ $A(x+y) = A(x) + A(y) \Rightarrow$ System von linearen DGLen. Ein negativer, ein positiver Eigenwert, EV zum negativen EW $x = (1,0)^t$ ($x' = \frac{1}{5}(\frac{1}{2}y - x)$; $\quad y' = \frac{1}{5}y$)
Abb.2: Vektorfeld, nicht linear, da nicht für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt, $A(x+y) = A(x) + A(y)$, Lösungen entweder periodisch oder "spiralförmig". ($x' \frac{1}{10} y$; $\quad y' = \frac{1}{10}(y \sin(x) - x)$)
Abb.3: System von linearen DGLen (Argument siehe Fall 1), komplexe Eigenwerte ($x' = -0,15y$; $\quad y' = 0,25x$)
Abb.4: Könnte Richtungsfeld einer autonomen DGL, da invariant unter Zeittranslation ($x' = sin(x)$)
Abb.5: Könnte Richtungsfeld sein, allerdings nicht autonom, da Lösungen nicht translationsinvariant. Allerdings sind sie invariant unter Ortstranslation, daher DGL von der Form $x'(t) = f(t)$. Lösung ist einfach Integral. ($x'(t) = sin(t)$)

G04 *(Exponentialmatrix)*

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A$, $A^4 = -A^2$, $A^5 = A$
Also $A^{2k+1} = -1^k A$ und $A^{2k} = -1^k \mathbb{1}$.
$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} = A \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} + \mathbb{1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \;\to\; \sin(1)A + \cos(1)\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) \end{pmatrix}$.

ii) Sei A eine Diagonalmatrix. Dann ist $A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^k \end{pmatrix}$.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\begin{pmatrix} a_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^k \end{pmatrix}}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{a_1^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{a_n^k}{k!} \end{pmatrix}$$

Durch Limesbildung folgt die Behauptung.

iii) Sei S invertierbar.

$\sum_{k=0}^n \frac{(SAS^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{SA\overbrace{S^{-1}S}^{1}AS^{-1}\cdots SA\overbrace{S^{-1}S}^{1}AS^{-1}}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{SA^kS^{-1}}{k!} = S\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}S^{-1} = Se^AS^{-1}$

Durch Limesbildung folgt die Behauptung.

H01 *(Reduktion der Ordnung)* 4 Punkte

Erfülle $y:\ T \to \mathbb{R}$ die DGL n-ter Ordnung. Dann gilt $x'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix}$ und

$$Ax(t) + b(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ -a_0y(t) - \cdots - a_{n-1}y(t)^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k(t) \end{pmatrix}.$$

Nach Voraussetzung gilt $y^{(n)}(t) = -a_{n-1}y^{(n-1)}(t) - \cdots - a_0y(t)$. Also löst $x(t)$ das System 1.Ordnung.

Sei nun $x(t)$ eine Lösung der linearen DGL $x'(t) = Ax(t)$. Dann gilt $x_2(t) = x_1'(t), \ldots, x_{n-2}'(t) = x^{(n-1)}(t)$. Da $x^{(n-1)}(t)$ einmal differenzierbar ist, folgt daraus das $x_1(t)$ n-mal differenzierbar ist. Setze $y(t) = x_1(t)$. Aus der letzen Zeile folgt dann

$$y^{(n)}(t) = -a_0y(t) - \cdots - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + k(t).$$

H02 (Exponentialmatrix) 4 Punkte

i) Beachte $||Tx|| = ||T\frac{x}{||x||}|| \cdot ||x|| \le ||T||_{op} \cdot ||x||$.
$||ST||_{op} = \sup\{||STx|| : ||x|| \le 1\} \le \sup\{||S||_{op} \cdot ||Tx|| : ||x|| \le 1\} = ||S||_{op} \cdot ||T||_{op}$

ii) $||T^n||_{op} \le ||T||_{op}||T^{n-1}||_{op} \le \cdots \le ||T||_{op}^n$

H03 4 Punkte

i) Es genügt zu zeigen, daß $tr(A_1A_2) = tr(A_2A_1)$. Sei $A_1 = (a_{ij}),\ A_2 = (b_{ij})$. Es gilt $tr(A_1A_2) = \sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^n(\sum_{i=1}^n a_{ij}b_{ji}) = tr(A_2A_1)$

ii) $A \in M_n$ beliebig. Dann $\exists S, S^{-1}\ :\ SAS^{-1}$ Jordanmatrix mit Diagonalelementen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wähle in i) A_1 als SA, A_2 als S^{-1}, dann folgt $tr(SAS^{-1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = tr(S^{-1}SA) = tr(\mathbb{1}A) + tr(A)$. Weiter gilt $\det e^A = \det(S^{-1}e^{SAS^{-1}}S) = \det S^{-1}\det(e^{SAS^{-1}})\det S = \det(e^{SAS^{-1}}) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i}$. Insgesamt ergibt sich $e^{tr(A)} = e^{\sum\lambda_i} = \prod e^{\lambda_i} = \det e^A$.