Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
23.01.2008

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

7. Tutorium

T21 (Lineare DGLn)

i) Wir bestimmen zuerst die Lösung der homogenen Gleichung

$$y' = -y \sin t$$

mittels Trennung der Variablen

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} &= \int_{t_0}^{t} -\sin s \, ds \\ \ln|y(t)| &= \cos t - \cos t_0 + ln|y(t_0)| \\ y(t) &= c \cdot e^{\cos t} \ ,\end{aligned}$$

wobei $c = \pm e^{-\cos t_0 + \ln|y(t_0)|}$ gesetzt wird; hierbei ist zu beachten, dass die Wahl des Vorzeihens von c vom Anfangswert abhängt: Ist $y(t_0) > 0$, so muß man $c > 0$ wählen, ist hingegen $y(t_0) < 0$, so ist $c < 0$ zu wählen.
Um eine Lösung ψ der inhomogenen Gleichung zu bekommen, machen wir den Ansatz $\psi(t) = c(t)e^{\cos t}$. Dann berechnen wir

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= c(t)e^{\cos t}(-\sin t) + c'(t)e^{\cos t} \\ &= -\psi(t)\sin t + c'(t)e^{\cos t} = -\psi(t)\sin t + \sin t \\ \Rightarrow \ c'(t)e^{\cos t} &= \sin t\end{aligned}$$

Mittels Integration erhalten wir $c(t) = e^{-\cos t}$, d.h., $\psi(t) = 1$. Als allgemeine Lösung erhalten wir $y(t) = \phi(t) + \psi(t) = e^{\cos t} + 1$.

ii) Wir bestimmen zuerst die Lösung der homogenen Gleichung

$$y' = t$$

mittels Trennung der Variablen

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} &= \int_{t_0}^{t} s, ds \\ \ln|y(t)| &= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t_0^2 + ln|y(t_0)| \\ y(t) &= a \cdot e^{\frac{1}{2}t^2} \ ,\end{aligned}$$

wobei $a = \pm e^{-\frac{1}{2}t_0^2 + \ln|y_0|}$ gesetzt wird; hierbei ist zu beachten, dass die Wahl des Vorzeihens von c vom Anfangswert abhängt: Ist $y(t_0) > 0$, so muß man $c > 0$ wählen, ist hingegen $y(t_0) < 0$, so ist $c < 0$ zu wählen.
Um eine Lösung ψ der inhomogenen Gleichung zu bekommen, machen wir den Ansatz $\psi(t) = c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}$. Dann berechnen wir

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= c(t)te^{\frac{1}{2}t^2} + c'(t)e^{\frac{1}{2}t^2} \\ &= t\psi(t) + c'(t)e^{\frac{1}{2}t^2} = t\psi(t) + t \Rightarrow \ c'(t)e^{\frac{1}{2}t^2} = t\end{aligned}$$

Mittels Integration erhalten wir $c(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, d.h., $\psi(t) = -1$. Als allgemeine Lösung erhalten wir $y(t) = \phi(t) + \psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} - 1$.

T22 (Laguerre-DGL)

i) Ansatz $y(t) = \sum_n^\infty a_n t^n, y'(t) = \sum_{n=0}^\infty (n+1)a_{n+1}t^n, y''(t) = \sum_{n=0}^\infty (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$. Einsetzen und Identitätssatz für Potenzreihen liefert:

$$\begin{aligned} 0 =& ty'' + (1-t)y' + my \\ =& \underbrace{ma_0 + a_1}_{\overset{!}{=}0} + \underbrace{\sum_{n=1}((m-n)a_n + (n+1)^2 a_{n+1}))t^n}_{\overset{!}{=}0}, \end{aligned}$$

d.h.,

$$\begin{aligned} a_1 =& -ma_0 \\ a_2 =& -\frac{m-1}{2\cdot 2}a_1 = \binom{m}{2}\frac{a_0}{2} \\ a_3 =& -\frac{m-2}{3\cdot 3}a_2 = -\binom{m}{3}\frac{a_0}{6} \vdots \\ a_n =& (-1)^n \binom{m}{n}\frac{a_0}{n!} \end{aligned}$$

Also

$$y(t) = a_0 \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \binom{m}{n}\frac{1}{n!}t^n \ .$$

ii) Ist $m \in \mathbb{N}$, so bricht die Reihe bei $n = m$ ab und man erhält das Laguerre-Polynom $L_m(t)$ vom Grad m.

iii) Beachte

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m}(t^m e^{-t}) =& \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}(e^{-t})^{(k)}(t^m)^{(m-k)} \\ =& \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}(-1)^k e^{-t}(t^m)^{(m-k)} \\ =& \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} e^{-t}\frac{m!}{k!}t^k \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

T23 Exakte DGLn

i) Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(e^{\int f_h(t)\,dt}h(t,y)) =& e^{\int f_h(t)\,dt}(h_t(t,y) + f_h(t,y)h(t,y) \\ =& e^{\int f_h(t)\,dt}(h_t(t,y) + \frac{\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial t}}{h(t,y)}h(t,y)) \\ =& e^{\int f_h(t)\,dt}g_y(t,y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{\int f_h(t)\,dt}g(t,y)) \ . \end{aligned}$$

Also ist die DGL

$$e^{\int f_h(t)\,dt}g(t,y) + e^{\int f_h(t)\,dt}h(t,y)y'(t,y) = 0$$

exakt.

ii) $\frac{g_y - h_t}{h} = 2t$. Daher ist $M(t) = e^{x^2}$ ein integrierender Faktor.

T24 (DGLn)

i) Sei $\phi_L(t) := \phi(t+L)$. Die Funktion ϕ_L ist Lösung des Problems:

$$\phi_L'(t) = \phi'(t+L) = f(t+L, \phi(t+L)) = f(t, \phi_L(t)),\ \phi_L(t_0) = \phi(t_0 + L) = \phi(t_0) \ .$$

ii) Sei $\phi:\ (-r,r) \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL. Wir definieren

$$\psi:\ (-r,r) \to \mathbb{R}, \quad \psi(t) := \phi(-t)$$

Da $\psi'(t) = -\phi'(-t)$ und $\psi''(t) = \phi''(t)$, ist wegen $a(-t) = -a(t)$ und $b(-t) = b(t)$ auch $\psi(t)$ eine Lösung der DGL. Es gibt eine Lösung ϕ mit der Anfangsbedingung $\phi(0) = 1, \phi'(0) = 1$. Die Funktionen ϕ_1, ϕ_2 seien definiert durch

$$\phi_1 := \frac{1}{2}(\phi + \psi), \quad \phi_2 := \frac{1}{2}(\phi - \psi)\ .$$

Dann ist ϕ_1 eine gerade und ϕ_2 eine ungerade Lösung der DGL. Da

$$\begin{aligned}\phi_1(0) =& 1, \quad \phi_1'(0) = 0\ ,\\ \phi_2(0) =& 0, \quad \phi_2'(0) = 1\ ,\end{aligned}$$

sind ϕ_1 und ϕ_2 linear unabhängig, bilden also ein Lösungsfundametalsystem.