Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
10.01.2008

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

6. Tutorium

T18 (Picard-Lindelöf)

i) $f(t,y)$ ist stetig differenzierbar $\Rightarrow$ lokal Lipschitz-stetig
$f(t,y)\sin|y|$ ist lokal Lipschitz stetig. (Beachte $|f(t,x)\sin|x| - f(t,y)\sin|y|\,| \leq |f(t,x)\sin|x| - f(t,y)\sin|x|\,| + |f(t,y)\sin|x| - f(t,y)\sin|y| \leq \sin|x| L\,|x-y| + f(t,y)|\sin|x| - \sin|y|\,| \leq L|x-y| + 2f(t,y)$)
$\Rightarrow$ Lösungen existieren eindeutig. Ferner sind für $y_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ die konstanten Funktionen $y(t) = k\pi$ Lösungen und zwar für alle t, da die Lösung bis zum Rand fortgesetzt werden kann. Das bedeuet aber für eine Lösung $y(t)$ eines AWP mit $y_0 \in (k\pi, (k+1)\pi)$ $\;y(t) \in (k\pi, (k+1)\pi)$ für alle t, d.h., dass $y(t)$ beschränkt ist. Da die Lösung aber bis zum Rand fortgesetzt werden kann, muss dies der Rand der "Zeit" t sein.
$\Rightarrow$ Die Lösung läßt sich auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen.

ii) $f(y)$ stetig differenzierbar $\Rightarrow$ $f(y)$ lokal Lipschitz-stetig. Da die DGL $y' = f(y)$ autonom ist und $f(0) = 0$, folgt $y = 0$ ist Lösung der DGL. Sei nun $y(t)$ eine Lösung mit $y(0) = y_0 < 0$, dann muß $x(t)$ streng monoton wachsen ($f(x) > 0$), kann aber $y = 0$ nicht kreuzen. D.h. insbesondere, $y(t)$ ist beschränkt. Da sich die Lösung bis zum Rand fortsetzen läßt, existiert sie für alle $t \geq 0$ und muß asymptotisch gegen 0 streben (Warum kann es keine Asymptote < 0 geben ?). Also $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

T19 (Variablentrennung)

i) Variablentrennung liefert

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \cosh(t)\,dt + C \\
&\Rightarrow\ \operatorname{arsinh}(y) = \sinh(t) + C \\
&\Rightarrow\ y(t) = \sinh(\sinh(t) + C)
\end{aligned}$$

ii) Durch die Substitution $z = t + y$ geht die DGL über in $z' = 1 + y' = 1 + z^2$. Variablentrennung liefert

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int 1\,dt \\
&\Rightarrow\ \arctan(z) = t + C \\
&\Rightarrow\ z(t) = \tan(t + C) \\
&\Rightarrow\ y(t) = \tan(t + C) - t
\end{aligned}$$

iii) Hier ist $y' = f(\frac{y}{t})$. Wir setzen also $z(t) = \frac{y(t)}{t}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&f(z) = y' = tz'(t) + z(t) \quad \Rightarrow\ z'(t)\frac{1}{t}(f(z) - z) \\
&\Rightarrow z'(t) = -\frac{1}{t}\alpha\sqrt{1+z^2} \\
&\Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int -\frac{\alpha}{t}\,dt + C \ \Rightarrow\ \operatorname{arsinh}(z) = -\alpha\log|x| + C \\
&\Rightarrow z(t) = \sinh(C - \alpha\log|t|) \\
&\Rightarrow y(t) = t\sinh(C - \alpha\log|t|)
\end{aligned}$$

T20 (Existenz und Eindeutigkeit)

i)

$$\begin{aligned}\phi'(t) =& (\lim_{n\to\infty} \phi_n(t))' \overset{1.}{=} \lim_{n\to\infty} \phi_n'(t) \\ =& \lim_{n\to\infty} (x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi_{n-1}(s))\,ds)' = \lim_{n\to\infty} f(t, \phi_{n-1}(t)) \\ \overset{2.}{=}& f(t, \lim_{n\to\infty} \phi_{n-1}(t)) = f(t, \phi(t))\end{aligned}$$

<u>Zu 1.:</u> Beh: ϕ_n' konvergiert gleichmäßig.
Dann folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \phi_n' = \phi'$.
Beweis der Beh: Beachte $(\phi_n(t))' = f(t, \phi_{n-1}(t))$. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ für alle $t \in J$, sodaß für alle $n > n_0$ gilt $|\phi_n(t) - \phi_{n_0}(t)| < \delta$ und $|f(t,x) - f(t,y)| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $t, x, y \in J$, $|x - y| < \delta$. Dann gilt für alle $t \in J$

$$|f(t, \phi_n(t)) - f(t, \phi(t))| \leq |f(t, \phi_n(t)) - f(t, \phi_{n_0}(t))| + |f(\phi_{n_0}(t)) - f(t, \phi(t))| \leq \epsilon.$$

Insbesondere konvergiert ϕ_n' auf J gleichmäßig gegen $f(t, \phi(t))$.
<u>Zu 2.:</u> f ist stetig.

ii) Stetigkeit ist klar.
Betrachten wir Umbebungen von $(0,0)$. Und betrachten wir insbesondere den Bereich $y \leq t^2$.

$$|f(t,y) - f(t,0)| = |2t - 4\frac{y}{t} - 2t| = |\frac{4}{t}||y - 0|$$

$\Rightarrow$ f ist nicht lokal Lipschitz stetig.

iii)

$$\begin{aligned}&\phi_0(t) = 0 \\ &\phi_1(t) = 0 + \int_0^t f(s, \phi_0(s)) = 0 + \int_0^t 2s\,ds = t^2 \\ &\phi_2(t) = 0 + \int_0^t f(s, \phi_1(s))\,ds = -t^2 \\ &\vdots \\ &\phi_{2n-1}(t) = t^2 \\ &\phi_{2n}(t) = -t^2\end{aligned}$$

iv) Setze $\xi_n = \phi_{2n-1} = t^2$ und $\eta_n = \phi_{2n} = -t^2$. Einsetzen zeigt, dass dies keine Lösungen sind.