Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
28.11.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

5. Tutorium

T17 (Differentialgleichungen von Kurvenscharen)

i) $\frac{df}{dx} = 2x + 2y'y = 0$. Daraus erhalten wir die DGL

$$y' + \frac{x}{y} = 0. \tag{*}$$

ii) Für $y = 0$ wird die DGL sinnlos, $y' = \infty$. Wir erhalten als Lösung also lediglich die Funktionen $y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ für $x \in (-r, r)$.

iii) $F(x, y) = x^2 + y^2$. Das Vektordfeld $\operatorname{grad} F$ ist ein Zentralfeld.

iv) Parametrisierung $(x(t), y(t) = r(\cos\phi t, \sin\phi t)$. Die Tangentialvektoren sind tangential am Kreis $x^2 + y^2 = r^2$.

v) Die Tangentialvektoren stehen senkrecht auf dem Vektorfeld ∇F.

vi) Es gilt $x^2(t) + y^2 = r^2(t)$, also $F(x(t), y(t)) = 0$. Wir leiten nach t ab

$$\Rightarrow \frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{F}{y}\frac{dy}{dt} = 0. \tag{**}$$

Seien $x = \xi(t), y = \eta(t)$ Lösungen von (**). Dann ist für t_0 mit $\xi'(t_0) \neq 0$ die Funktion $\xi(t)$ in einer Umgebung von t_0 invertierbar, d.h. $t = t(x) = \xi^{-1}(x)$. Wir können daher eine neue explizite Parametrisierung angeben, und zwar $x = t'$ und $y(x) = \eta(\xi^{-1}(x)) = \eta(t(x))$. (Beachte: $\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt'} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt'} = (\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt})\frac{dt}{dt'} = 0$; x, y genügen wieder der DGL). Wegen $2x\frac{dx}{dt'} + 2y\frac{dy}{dt'} = 2x + 2yy' = 0$ führt das zurueck auf eine DGL der Form (*).
Sei umgekehrt eine (explizite) L ösung der DGL (*) aus i) gegeben, verstehen wir sie einfach als Parametrisierung. Dann erfüllt sie die DGL in iv).
Lösungen der beiden DGL sind äquivalent hinsichtlich der Kurvensegmente, die sie beschreiben. Der Graph ist allerdings unterschiedlich.

T18 (Eulersche DGL)

i) Ist $y(x)$ eine Lösung, dann ist auch $y(-x)$ eine Lösung (einsetzen!). Wir können also o.B.d.A. annehmen $x(t) > 0$.

ii) Beachte $x^\lambda = e^{\lambda t}$. Daher gilt $\sum_{k=0} b_k \lambda^k e^{\lambda t} = \sum_{k=0} b_k (e^{\lambda t})^{(k)} = \sum_{k=0} a_k x^{k\lambda} (x^\lambda)^{(k)}$. Ich erhalte das charakteristische Polynom $P(\lambda)$ des reduzierten Systems der linearen DGL, daher aus $(-1)^n P(\lambda) x^\lambda = \sum_{k=0}^n a_k x^{k\lambda} (x^\lambda)^{(k)}$.

iii) Wir finden $(\lambda(\lambda - 1) - 3\lambda + 7)x^\lambda = P(\lambda)x^\lambda$. Die charakteristische Gleichung hat also die Nullstellen $\lambda_{1,2} = 2 \pm i\sqrt{3}$. Wir erhalten für der lineare DGL die zwei Lösungen $\phi_1(t) = e^{(2+i\sqrt{3}t}$ und $\phi_2(t) = e^{(2-i\sqrt{3})t}$. Oder reell $\phi_1(t) = e^{2t}\sin\sqrt{3}t$ und $\phi_2(t) = e^{2t}\cos\sqrt{3}t$. Nach Resubstitution ergibt sich $y_1(t) = x^2 \sin\sqrt{3}\ln x$ und $y_2(t) = x^2\cos\sqrt{3}\ln x$.