Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
31.10.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

3. Tutorium

T14 (Lineare DGLen)

i) Matrix ist in Jordanscher Normalform; EW λ, EV $v_1 = (1,0)^t$ und Hauptvektor $v_2 = (0,1)^t$. Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t}(v_2 + t v_1)$$

mit Konstanten c_1, c_2.

ii) Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$.
Zuerst die homogene Lösung: Bestimme EWe und EVen: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$ und $v_1 = (-2,1)^t$, $v_2 = (4,1)^t$. Daher homogene Lösung $x_h(t) = c_1 e^{-t} v_1 + c_2 e^5 v_2$.
Jetzt zur inhomogenen Lösung: Wir wählen den Ansatz: $x_1(t) = -2c_1(t)e^{-t} + 4c_2(t)e^{5t}$ und $x_2(t) = c_1(t)e^{-t} + c_2(t)e^{5t}$. Wir setzen den Ansatz in die DGL und erhalten $-2c_1'(t)e^{-t} + 4c_2(t)e^{5t} = e^t$ und $c_1'(t)e^{-t} + c_2'(t)e^{5t} = t$. Das ergibt $c_2'(t) = \frac{1}{6}(2te^{-5t} + e^{-4t})$ und $c_1'(t) = \frac{1}{6}(te^t - 1)$. Unbestimmte Integration liefert $c_1(t) = \frac{1}{6}t + \frac{2}{3}e^t - \frac{2}{3}$ und $c_2(t) = \frac{1}{24}e^{-4t} - \frac{1}{15}te^{-5t} - \frac{1}{75}e^{-5t} + \frac{11}{200}$. Eine inhomogene Lösung ergibt sich so zu $x_i(t) = (x_1(t), x_2(t))^t$. Die allgemeine Lösung ist gegeben durch $x(t) = x_h(t) + x_i(t)$.

iii) Allgemeine homogene Lösung ist $x_h(t) = c_1 + c_2 e^{-4t}$. Inhomogene $x_i(t) = -\frac{1}{20}\cos 2t + \frac{1}{10}\sin 2t$. Allgemeine Lösung $x(t) = x_h(t) + x_i(t)$.

iv) $\lambda_1 = 2 + 3i$ und $\lambda_2 = 2 - 3i$. Also $u_1(t) = e^{(2+3i)t}$ und $u_2(t) = e^{(2-3i)t}$ komplexes Fundamentalsystem. $x_1(t) = \frac{1}{2}(u_1(t) + u_2(t)) = e^{2t}\cos 3t$ und $x_2(t) = \frac{1}{2i}(u_1(t) - u_2(t)) = e^{2t}\sin 3t$ ist reelles Fundamentalsystem.

T15 (Lineare DGLen)

i) Sei $x = e^t$ und $u(t) = y(e^t)$. Wir setzen für $n \le 2$ $L_n : \ C^\infty(\mathbb{R} \to C^\infty(\mathbb{R}),\ y \mapsto L_n(y(t)) = y^{(n)}(t) - ny^{(n-1)(t)}$ und $L_1(y(t)) = y(t)'$, $L_0(y(t)) = y(t)$. Beachte $\frac{dL^{(n)}}{dt} = L^{(n+1)}$ und

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{du}{dt}\frac{1}{x} = \frac{dy}{dt}e^{-t} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{du'}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}u'e^{-t}\frac{dt}{dx} = (\frac{d^2u}{dt^2}e^{-t} - \frac{dy}{dt}e^{-t})e^{-t} = \frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t} - \frac{dy}{dt}e^{-2t} = L_2(u)e^{-2t} \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= = \frac{d}{dt}(\frac{d^2y}{dx^2})\frac{dt}{dx} = (\frac{dL_2(u)}{dt} - 2L_2(u))e^{-3t} = L_3(u) - 2L_2(u)e^{-3t} \\
&\vdots \quad \textit{Induktion} \\
\frac{d^ky}{dx^k} &= (L_k - (k-1)L_{k-1})e^{-kt} = (L^k - (k-1)L_{k-1})\frac{1}{x^k}
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert die DGL

$$\begin{aligned}
a_n\frac{x^k}{x^k}(L_n(y) + (n-1)L_{n-1}(y)) + a_{n-1}\frac{x^k}{x^k}(L_{n-1}(y) + (n-2)L_{n-2}(y)) + \cdots \\
\cdots + a_3\frac{x^3}{x^3}(L_3(y) + 2L_2(y)) + a_2\frac{x^2}{x^2}L_2(u) + a_1L_1(u) + a_0L_0(u) = \\
a_nL_n(y) + (n-1)L_{n-1}(y)) + a_{n-1}(L_{n-1}(y) + (n-2)L_{n-2}(y)) + \cdots \\
\cdots + a_3(L_3(y) + 2L_2(y)) + a_2L_2(u) + a_1L_1(u) + a_0L_0(u) = 0.
\end{aligned}$$

Diese ist aber linear in den Ableitungen nach x.

ii) Mit der Substitution aus i) erhalten wir

$$y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0.$$

Wir erhalten die allgemeine Lösung $y_A(t) = c_1 e^{(2+i)t} + c_2 e^{(2-i)t}$. Nach Resubstitution und Wahl eines reellen Fundamentalsystems ergibt sich:

$$y_A(x) = c_1 x^2 \cos(\ln x) + c_2 x^2 \sin(\ln x), \quad y(x) = 2x^2 \cos(\ln x)x - 1x^2 \sin(\ln x)\ .$$

T16 (Alkoholvergiftung)

i) $A = \begin{pmatrix} -k_{12} & 0 & 0 \\ k_{12} & -(k_{23}+k_{24}) & k_{32} \\ 0 & k_{23} & -k_{32} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die DGL lautet dann $m'(t) = Am(t) + b$.

ii) Bestimme $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = -(\lambda + k_{12})((k_{23}+k_{24})+\lambda)(\lambda+k_{32}) - k_{23}k_{32}) = -(\lambda+k_{12})(\lambda^2 + (k_{23} + k_{24} + k_{32})\lambda + k_{24}k_{32})$. Da die Koeffizienten alle positiv sind, muessen alle Wurzeln negativ sein.

iii) Wir wählen den Ansatz $m_1 = c_1$, $m_2 = c_2$ und $m_3 = c_3$, da wir ja auf einen Gleichgewichtszustand spekulieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} -k_{12}c_1 &= k \\ k_{12}c_1 + c_2(k_{23}+k_{24}) + k_{32}c_3 &= 0 \\ k_{23}c_2 - k_{32}c_3 &= 0 \end{aligned}$$

und daraus $c_1 = -\frac{k}{k_{12}}$, $c_2 = \frac{k}{k_{24}}$ und $c_3 = \frac{kk_{23}}{k_{32}k_{24}}$.