Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
31.10.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

3. Tutorium

T10 (AWP)

i) Wir bestimmen Eigenwerte und Eigenvektoren: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+2i$, $\lambda_3 = 1-2i$ und $v_1 = (1, -\frac{3}{2}, 1)^t$, $v_2 = (0, 1, -i)^t$, $v_3 = (0, 1, i)$. Das bedeutet ein Lösungssystem ist gegeben durch:

$$\left\{ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

Jetzt noch Koeffizienten c_1, c_2, c_3 bestimmen. $y(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Daher finden wir $c_1 = 1$ und $c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \overline{c}_3$.

ii) Mit Ü.Blatt 1 H01 finden wir ein System von linearen DGLen. $x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} x(t)$. Wir bestimmen die EWs und EVs er Matrix. $\lambda_{1/2} = 1$, $\lambda_3 = -3$ und $v_1 = (1,1,1)^t$, $v_3 = (1,-3,9)^t$. Bestimmen Hauptvektor v_2 zu λ_1: $(A - \lambda_1 \mathbb{1})^2 v_2 = 0$. Wir erhalten $v_2 = (-2,-1,0)^t$. Das bedeutet ein Lösungssystem ist gegeben durch:

$$\left\{ e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} t-2 \\ t-1 \\ t \end{pmatrix}, e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die allgemeine Lösung schaut also so aus: $y(t) = c_1 e^t + c_2 e^t (t-2) + c_3 e^{-3t}$. Wir finden folgende Gleichungen für die Koeffizienten $c_1 - 2c_2 + c_3 = 0$, $c_1 - c_2 - 3c_3 = -4$ und $c_1 + 9c_3 = 8$. Hieraus ergibt sich $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ und $c_3 = 1$.

T11 (Stationäre und periodische Lösungen)

i) $\underline{\Rightarrow}$: Sei $y(t) = y(0) = y_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Beachte $y(t) = e^{At} y_0$. Dann gilt $\frac{e^{At} - \mathbb{1}}{t} y(0) = \frac{y_0 - y_0}{t} = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Daher auch $\lim_{t \to 0} \frac{e^{At} - \mathbb{1}}{t} y(0 = A y_0 = 0$; d.h., $y_0 \in \ker A$.

$\underline{\Leftarrow}$:Sei $y(0) \in \ker A$. Dann gilt $S_n(t) y(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(tA)^k}{k} y_0 = y_0$ für alle $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}$ und für den Grenzwert $y(t) \lim_{n \to \infty} S_n y(0) = y(0)$; daher für die Lösung $y(t) = e^{At} y(0) = y(0)$.

ii) A besitzt mindestens einen reellen Eigenwert λ (siehe Lineare Algebra, Hinweis $A\overline{v} = \overline{AV} = \overline{\lambda v} = \overline{\lambda}\overline{v}$). Sei v der dazugehörige EV. Dann ist $\phi(t) = e^{\lambda t} v$ eine nicht-periodische Lösung.

T12 (DGl n-ter Ordnung) Beachte $x_1'(t) = 1$ und $x_2(t) = e^t$. Daher muss die DGL $a_n y^n(t) = \cdots + a_0 y(t) = 0$ (ausgenommen der Trivialen) von der Ordnung $n = 3$ sein mit Koeffizienten $a_0 = 0$. Für die Koeffizienten $a_k, k \geq 2$ muss gelten, dass sie paarweise mit umgekehrtem Vorzeichen auftauchen müssen.

T13 (Matrizenmultiplikation und Produktregel)

i) $\underline{\Rightarrow}$: (A_n) konvergiere bzgl. Operatormorm gegen A. Angenommen (A_n) konvergiere nicht koordinatenweise, und es gelte insbesondere o.B.d.A $|(A_{ij})_n - A_{ij}| > \epsilon$. Dann $|(A_{ij})_n - A_i j| \leq ||(A_n - A)e_i|| \leq ||A_n - A||_{op}$. Widerspruch.

$\underline{\Leftarrow}$: (A_n) konvergiere kooardinatenweise gegen A. Dann gilt folgende Abschätzung für $||x|| \leq 1$:

$$||((A_{ij})_n - A_{ij})x|| = ||| \sum_{i,j} ((A_i j)_n - A_{ij}) x_i e_i|| \leq || \sum_{ij} |((A_{ij})_n - A_{ij})|.$$

Daher folgt $||A_n - A||_o p \to 0$.

Zeige, dass eine Folge von Matrizen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_i \in M_n$ genau dann bezüglich der Operatornorm konvergiert, wenn sie koordinatenweise konvergiert.

ii) Es gilt $(B_n A_n)_{ij} = \sum_k (B_{ik})_n (A_{kj})_n$ und $\lim_{n\to\infty} \sum_k (B_{ik})_n (A_{kj})_n = \sum_k \lim_{n\to\infty} (B_{ik})_n (A_{kj})_n = \sum_k B_{ik} A_{kj} = (BA)_{ij}$.

iii) Seien $A(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{k\times m}$ und $B(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ differenzierbare matrixwertige Abbildungen. Betrachte $\frac{A(t+h)B(t+h)-A(t)B(t)}{h} = \frac{A(t+h)(B(t+h)-B(t))+(A(t+h)-A(t))B(t)}{h}$. Dieser Ausdruck konvergiert nach ii) gegen $A(t)B'(t) + A'(t)B(t)$.