Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
31.10.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

2. Tutorium

T06 i) **Vektorraum:** Ist klar.
normiert: klar, Operatornorm
Vollständigkeit: Wir müssen zeigen, dass jede Cauchyfolge in $B(V,W)$ konvergiert. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}, T_i \in B(V,W)$ eine Cauchy-Folge von beschränkten, linearen Abbildungen. Sei $x \in V$ beliebig. Dann ist $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in W, denn $||T_m x - T_n x||_2 \leq ||T_m - T_n||_{op}||x||_1$. Nun ist aber W ein Banachraum, und daher muss jede Cauchyfolge in W konvergieren. Also auch die Cauchyfolge $T_n x$. Ihren Grenzwert bezeichnen wir suggestiv mit

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$$

und haben hiermit einen punktweisen Kandidaten. Dieser ist (punktweise) linear.
Linearität: Seien $x, y \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Dann gilt $\lambda T_n(x) + \mu T_n(y) = T_n(\lambda x + \mu y)$. Also $\lambda \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \mu \lim_{n\to\infty} T_n(y) = \lim_{n\to\infty}(T_n(\lambda x) + T_n(\mu y)) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + \mu y)$.

Jetzt müssen wir zeigen, dass (T_n) gleichmässig gegen T konvergiert, d.h., $||T_n - T||_{op} \to 0$. Zu $\epsilon > 0$ wählen wir ein n_0, sodass $||T_m - T_n||_{op} < \epsilon$, $\forall n, m > n_0$. Sei $x \in V$, $||x||_1 \leq 1$. Wir wählen für jedes $x \in V$ ein $m_{\epsilon,x} > n_0$, sodass $||T_{m_{\epsilon,x}} x - Tx||_2 < \epsilon$. Daraus folgt $||T_n x - Tx||_2 = ||T_n x - T_{m_{\epsilon,x}} x + T_{m_{\epsilon,x}} x - Tx||_2 \leq ||T_n x - T_{m_{\epsilon,x}} x||_2 + ||T_{m_{\epsilon,x}} x - Tx||_2 \leq ||T_n - T_{m_{\epsilon,x}}||_{op}||x||_1 + \epsilon \leq 2\epsilon$ für alle $x \in V$.

Wir wissen allerdings nicht, ob T in $B(V,W)$ liegt, d.h., linear und beschränkt ist.
Beschränktheit: $||Tx||_2 \leq ||T_n x - T_x||_2 + ||T_n x||_2 < \infty$

ii) Im Beweis werden nur Eignschaften (Submultiplikativität) der Operatornorm und die Vollständigkeit von $B(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ verwendet. Beides ist auch erfüllt, falls W ein Banachraum ist. Das bedeutet der Beweis kann analog geführt werden und liefert die Konvergenz der Reihe.

T07

T08 $ST = TS \;\Rightarrow\; (S+T)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$
Sei $\sum c_n$ das Cauchyprodukt von e^S, e^T. Es gilt $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k!} A^k B^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \frac{1}{n!}(A+B)^n$

T09 Der Anteil der Uninformierten zum Zeitpunkt t ist

$$q = \frac{N - I(t)}{N}.$$

i) In einer Zeitspanne der Länge Δt trifft ein Informierter auf $kq\Delta t$ Nichtinformierte. Da es $I(t)$ Informierte gibt bedeutet dies

$$I(t)' = T(t)kq = \frac{k}{N} I(t)(N - I(t)).$$

Das ist gerade eine Gleichung vom Typ des beschränkten Wachstums.

ii) Abb. 1

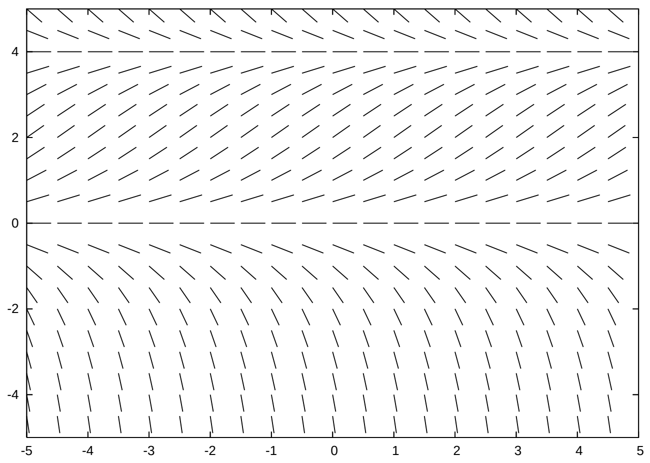

Abbildung 1: $I(t)' = \frac{1}{4}I(t)(4 - I(t)$