Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
17.10.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

1. Tutorium

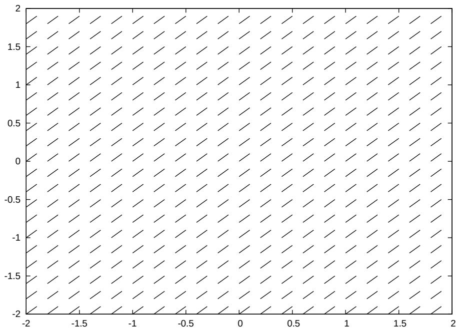

Figure 1: $x' = 1$

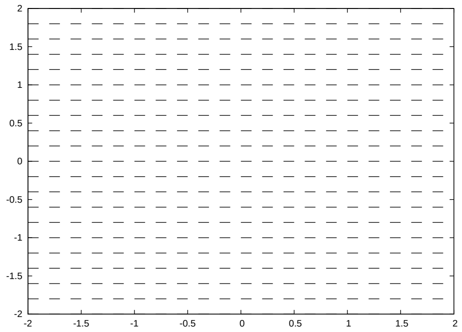

Figure 2: $x' = 0$

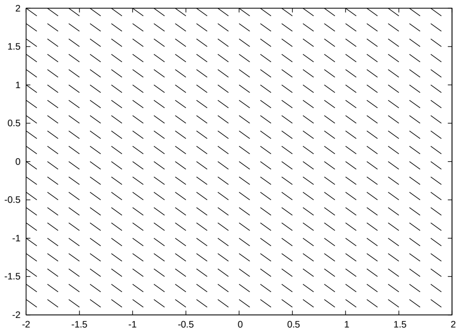

Figure 3: $x' = -1$

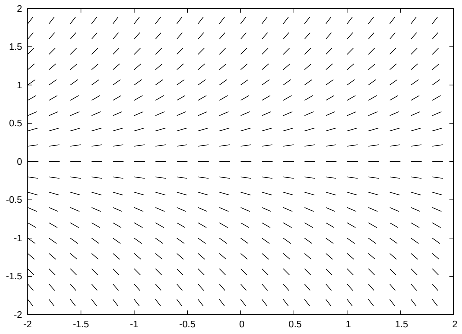

Figure 4: $x' = x$

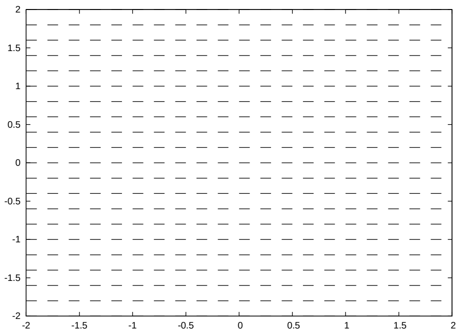

Figure 5: $x' = 0x$

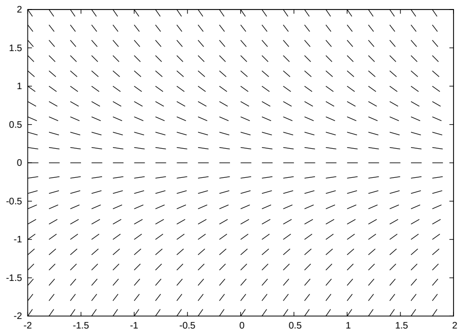

Figure 6: $x' = -x$

T01 i) Eine Lösung der Dgl ist eine Kurve $y(t)$ im Richtungsfeld, deren Ableitung in jedem Punkt $y' = q$ bzw. $y' = py$, d.h. gleich dem Vektorfeld in diesem Punkt ist. Das bedeutet insbesondere, dass das Vektorfeld in jedem Kurven Punkt tangential ist.

ii) Für $p, q > 0$ oder $p, q < 0$ bleiben die Lösungen unter leichten Störungen $p - \epsilon, q - \epsilon > 0$ bzw.$p - \epsilon, q - \epsilon < 0$ vom "gleichen Typ". Für $p, q = 0$ führen leichte St¨orungen jedoch zu wesentlichen Änderungen der Lösung.

T02 i) a) Für $p = 0$ ist $x(t) = c, c \in \mathbb{R}$ Lösung und für $p \neq 0$ $x(t) = pt$.
b) Für $q = 0$ ist $x(t) = c, c \in \mathbb{R}$ Lösung und für $q \neq 0$ $x(t) = ce^{qt}$.

ii) Wir beweisen die Eindeutigkeit nur im Fall b)(a) analog). $x(t) = e^{pt}$ ist eine Lösung. Sei $u(-t)$ eine weitere Lösung der Dgl. Dann gilt $(u(-t)e^{pt})' = -u'(t)e^{pt} + u(t)pe^{pt} = -pu(t)e^{pt} + u(t)pe^{pt} = 0$. Daraus folgt $u(-t)e^{pt} = k = const$, und hieraus $u(-t) = ke^{-pt}$. Wegen $u(0) = 1$ folgt $k = 1$, also $u(t) = x(t)$.

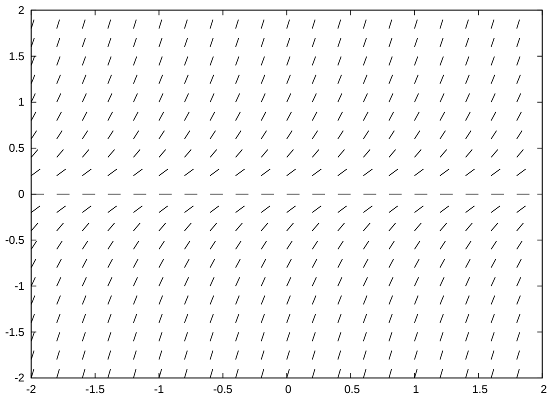

Figure 7: $x' = 3y^{2/3}$

T03 i) Lösungen sind $y(t) = 0$, alle auf der t-Achse verschobenen Parabeln $y(t) = (t - c)^3$ sowie zusammengesetzte Funktionen der Gestalt $y(t) = \begin{cases} (t - c_1)^3 & , t < c1 \\ 0 & , c_1 < t < c_2 \\ (t - c_2)^3 & , t > c2 \end{cases}$.

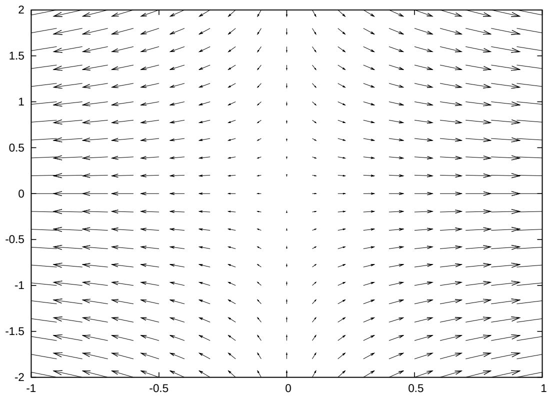

Figure 8: System lin. Dglen

T04 i) Siehe Fig.8

ii) Eine Lösung ist eine Kurve $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$, sodaß $(x_1(t), x_2(t))' = (2x_1(t), -\frac{1}{2}x_2)$, d.h. die Ableitung der Kurve in jedem Punkt gleich dem Vektorfeld ist. Daß bedeutet insbesondere, daß das Vektorfeld in jedem Kurvenpunkt tangential ist.