Prof.B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS07/08
30.01.2008

Analysis III für M. & Ph.:Differentialgleichungen

7. Übung

Die korrigierten Hausaufgaben zu Blatt 6 können ab 14.02. im blauen Regal neben K102 (Herrentoilette) abgeholt werden.

G25 (Stetige Abhängigkeit vom Vektorfeld)
Sei $f: \mathbb{R}^{n+1} \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges und bezüglich x Lipschitz-stetiges Vektorfeld mit Lipschitz-Konstante L. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'(t) = f(t, x(t)) \ .$$

Satz. *Sei $g: \mathbb{R}^{n+1} \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein weiteres stetiges Vektorfeld, sodass $||f(t,x) - g(t,x)|| < \epsilon \ \forall (t,x) \in \Omega$, und seien $x(t), y(t): J \to \mathbb{R}^n$ Wege mit $x(t_0) = y(t_0)$ für ein $t_0 \in J$ und $x'(t) = f(t, x(t))$, $y'(t) = g(t, y(t))$ für $t \in J$, dann gilt $\forall t \in J, t \geq t_0$:*

$$||x(t) - y(t)|| \leq \frac{\epsilon}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1) \ .$$

(Analog für $t \leq t_0$).

i) Verstehe die Aussage des Satzes. Überlege dir hierzu mögliche Anwendungen.
ii) Beweise den Satz. Hinweis: Finde eine Abschätzung für $v(t) = ||x(t) - y(t)||$, in die sowohl die Lipschitz-Konstante als auch die globale Schranke ϵ eingehen. Verwende dann das Lemma von Gronwall.

G26 (Störung)
Wir betrachten die DGL

$$x''(t) = -\sin(x(t)) + x(t), \ x(0) = 0 \ . \tag{*}$$

i) Führe die DGL über in ein System von DGLn erster Ordnung.
ii) Betrachte nun folgendes System von DGLn

$$y_1'(t) = y_2(t), \ y_2'(t) = y_1(t) \ y_1(0) = 0 \ . \tag{**}$$

Sei $\phi(t)$ eine Lösung von (*) und $\psi(t)$ eine Lösung von (**). Bestimme ein Intervall J, sodass

$$||\phi(t) - \psi(t)|| \leq \frac{1}{10} \quad \text{für alle } t \in J \ .$$

Überlege dir, aus welcher DGL 2.Ordnung (**) durch Reduktion hervorgeht. Erkennst du jetzt die Störung?

G27 (Wronski-Determinante)

Wir betrachten

$$y'(t) = A(t)y(t) \ ,$$

wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A: \ J \to M_n(\mathbb{K})$ stetig seien. Für n Lösungen $\phi_1, \ldots, \phi_n$ definieren wir die Lösungsmatrix

$$\Phi(t) := (\phi_1, \ldots, \phi_n)$$

und die sogenannte Wronski-Determinante

$$W(t) := \det \Phi(t) \ .$$

i) Sei $t_0 \in J$. Für die AWPe $y'(t) = A(t)y(t), \ y_i(t_0) = e_i$ und deren Lösungen $x_i(t)$ stellen wir die Lösungsmatrix $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ auf. Zeige:

$$y'(t) = A(t)y(t), \ y(t_0) = \eta \ \Leftrightarrow \ y(t) = X(t)\eta \ .$$

ii) Sei $Y(t)$ eine beliebige Lösungsmatrix, d.h., in den Spalten von $Y(t)$ stehen beliebige Lösungen $y_i(t)$ der DGL. Zeige:

$$Y(t) = X(t)Y(t_0) \ .$$

iii) Sei $t_0 \in J$. Zeige

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} tr\, A(s)\, ds}$$

Stelle hierzu eine DGL für $W(t)$ auf. Verwende i) und ii).

iv) Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $W(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in J$.

b) $W(t) \neq 0$ für alle $t \in J$.

iii) Zeige, dass die Spalten von $\Phi(t)$ genau dann eine Basis von Lösungen sind, wenn $W(t) \neq 0$.