Prof.B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
16.01.2008

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

6. Übung

G21 (Spezielle Lösungsansätze eindimensionaler DGLn)
Zeige, dass man jede der folgenden Differentialgleichungen mit der angegebenen Substitution auf eine lineare DGL bzw. eine DGL mit getrennten Variablen zurückführen kann. Dabei sind $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$ und d, e, f Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

i) $x'(t) = f(at + bx(t) + c)$, Substitution $u(t) := at + bx(t) + c$;

ii) $x'(t) = d(t)x(t) + e(t)x^{\alpha}(t), \alpha \neq 0, 1$, Substitution $u(t) := x(t)^{1-\alpha}$.
Diese DGL heißt auch Bernoulli-Differentialgleichung.

iii) $x'(t) = d(t)x(t) + e(t)x^2(t) + f(t)$, Substitution $u(t) := \frac{1}{x(t)-x_0(t)}$, wobei $x_0(t)$ eine beliebige Lösung zu einem geeigneten Anfangswert sei.
Diese DGL heißt auch Riccati-Differentialgleichung.

G22 (DGLn von Familien von Kurven)

i) Bestimme eine (implizte) DGL, die folgende Familie von Parabeln als Lösungen hat:

$$y^2 = 4c(c + x),\ \ c \in \mathbb{R}\ .$$

Differenziere hierzu die Kurve und versuche den Kurvenparameter zu eliminieren.

Bem.: Das ist die Familie der Parablen, deren Brennpunkte im Nullpunkt liegen und deren Achsen entlang der x-Achse verlaufen.

ii) Bestimme eine (implizite) DGL, die alle Tangenten an die Parabel $y^2 = 2x$ als Lösungen hat. Bestimme hierzu explizit die Familie der Tangenten und verfahre dann wie in i).

G23 (Exakte DGLn) Überprüfe nachfolgende DGLn auf Exaktheit. Finde gegebenfalls einen integrierenden Faktor und bestimme dann die allgemeine Lösung.

i) $2ty + (2y + t^2)y' = 0$

ii) $tyy' + x^2 + y^2 + x = 0$

G24 (Fortsetzen von Lösungen)

i) Löse das AWP
$$y'(t) = 2ty^2(t), \quad y(0) = y_0 > 0.$$

ii) Gib den maximalen Definitionsbereich deiner Lösung an. Verläßt der Graph deiner Lösung tatsächlich jedes Kompaktum in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

H16 (DGLn) 4 Punkte

Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden DGLn.

i) $y'(t) = e^y \cos t$.

ii) $ty'(t) - 2y(t) = t^2\sqrt{y(t)},\ y(1) = 1,$ wobei $I = (0, \infty)$ ist.

H17 (Exakte DGLn) 4 Punkte

Überprüfe nachfolgende DGLn auf Exaktheit. Finde gegebenfalls einen integrierenden Faktor und bestimme dann die allgemeine Lösung.

i) $(2 + \ln t)y'(t) + \frac{y}{t} + \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in (0, \infty)$

ii) $y + t(2ty - 1)y'(t) = 0$

H18 (Herrchen & Hund) 4 Punkte

Durch die xy-Ebene fließt ein Fluß, dessen Ufer durch $x = 0$ und $x = 1$ gegeben sind. Er fließt mit konstanter und homogener Geschwindigkeit v_0 in positive y-Richtung. Ein Hund springt im Punkt $(1, 0)$ in den Fluß und versucht, sein Herrchen zu erreichen, das in $(0, 0)$ auf ihn wartet. Der Hund schwimmt mit konstanter Geschwindigkeit v_1 und richtet sich immer genau auf sein Herrchen, während er abgetrieben wird.

i) Stelle eine DGL für die Kurve $y(x)$ des Hundes auf und bestimme eine Lösung.

ii) Untersuche die Kurve des Hundes in Abhängigkeit des Geschwindigkeitsverhältnisses $\frac{v_0}{v_1}$.

Sehr schöne, aber freiwillige Aufgabe:

H* (Das große Krabbeln)

In den Ecken eines quadratischen Tisches mit Seitenlänge $b = 1$ befinden sich 4 Käfer. Zum Zeitpunkt $t = 0$ laufen diese mit konstanter Geschwindigkeit v los, und zwar immer in Richtung des (im Uhrzeigersinne) nächsten Käfers.

i) Zeige, dass der Winkel $\angle(x_i(t), x_i'(t))$ zwischen dem Ortsvektor $x_i(t)$ jedes Käfers und seines Geschwindigkeitvektors $x_i'(t)$ immer konstant $\frac{\pi}{4}$ ist. Verwende hierzu die Symmetrie des Problems.

ii) Stelle eine DGL für die Bewegung der Käfer auf und löse diese. Fasse hierzu den Tisch als Teilmenge der komplexen Ebene auf und beschreibe jeden Punkt durch $x(r, \phi) = re^{i\phi}$.

iii) Bestimme nun die Bahn $r(\phi)$ jedes Käfers und deren Länge (evtl. ∞).