Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
19.12.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

5. Übung

G17 (Lipschitz Stetigkeit)
Untersuche, ob die folgenden Funktionen bezüglich x lokal oder global Lipschitz-stetig sind:

i) $f(t,x) = t^2$ ii) $f(t,x) = x^2$ iii) $f(t,x) = e^t x$

G18 (Existenz und Eindeutigkeit) Betrachte die Differentialgleichung $y''(t) + y(t) = t$ mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$. Zeige die Existenz einer eindeutigen Lösung mit Hilfe des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes und bestimme ein geeignetes Interval $[-s, s]$ auf dem eine Lösung existiert.

G19 (Banachscher Fixpunktsatz)
Betrachte den Banachraum $V = \mathbb{R}$, versehen mit dem Betrag als Norm, die abgeschlossene Teilmenge $X = \mathbb{R}$ sowie die Abbildung $\phi : \ X \to X, \ x \mapsto x - \arctan x + \frac{\pi}{2}$.

i) Zeige, dass die Ungleichung

$$|\phi(x) - \phi(y)| < |x - y|, \quad \forall x, y \in X, \ x \neq y \tag{*}$$

gilt, die Abbildung ϕ aber dennoch keinen Fixpunkt besitzt.

ii) Finde eine weitere auf einer abgeschlossenen Menge $X \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion $\phi : \ X \to X$, welche die Ungleichung (*) erfüllt und trotzdem keinen Fixpunkt in X hat.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass sich die Kontraktionsbedingung im Banachschen Fixpunktsatz nicht durch die schwächere Eigenschaft (*) ersetzen läßt.

G20 (Picard-Iteration)
Gegeben seien die Anfangswertprobleme

a) $x'(t) = x(t), \ x(0) = x_0$ und b) $y'(t) = ty(t) + t^3, \ y(0) = 0.$

i) Führe jeweils die Picard-Iteration durch und bestimme Intervalle $[-t_0, t_0]$ auf denen die Funktionenfolge $x_n(t)$ bzw. $y_n(t)$ gleichmäßig gegen eine Lösung konvergiert.

ii) Zeige, dass die Lösung durch eine auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe gegeben ist und bestimme deren Grenzfunktion.

Hinweis: $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n n!$

H13 (Symmetrie) 4 Punkte

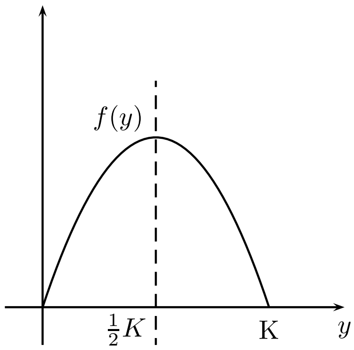
Seien $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetige Funktionen.

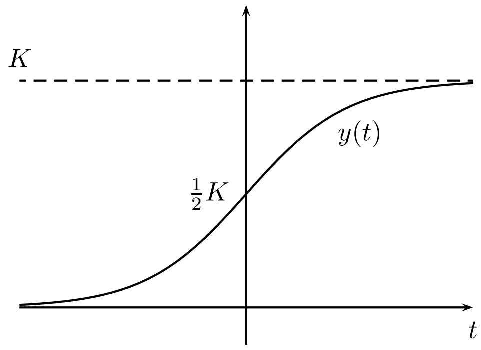
i) Es gelte
$$f(-t,x) = -f(t,x) \quad \text{für alle } (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$
Zeige: Ist $r > 0$, so geht jede Lösung $\phi: [-r,r] \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $x' = f(t,x)$ bei Spiegelung an der y-Achse in sich über.

ii) Es gelte
$$g(-x) = g(x) \quad \text{für alle } (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$
Zeige: Ist $r > 0$, so geht jede Lösung $\phi: [-r,r] \to \mathbb{R}$ des AWP $x' = g(t,x), x(0) = 0$ bei Punktspiegelung an $(t,x) = (0,0)$ in sich über.

H14 (Logistische Gleichung) 4 Punkte

Die "rechte" Seite f in der Gleichung des beschränkten Wachstums
$$y' = f(y) = \alpha y(K-y), \quad y \in \mathbb{R},\ \alpha,\ K > 0\,\text{konstant},$$
ist symmetrisch zur Achse $y = \frac{1}{2}K$, d.h., $f(\frac{1}{2}K + y) = f(\frac{1}{2}K - y)$, $y \in \mathbb{R}$.
Ein Blick auf den Graphen der Lösung $y(t)$ des AWP $y' = f(y),\ f(0) = \frac{1}{2}K$ suggeriert, dass $y(t)$ punktsymmetrisch bzgl. $(0, \frac{1}{2}K)$ ist, d.h., $y(-t) = K - y(t) = \frac{1}{2}K - (y(t) - \frac{1}{2}K)$.





Verwende eine der Behauptungen aus H13, um die Aussage über $y(t)$ zu beweisen.

H15 (Potenzreihenmethode) 4 Punkte

Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems
$$x''(t) - tx = 0, \quad x(0) = \alpha,\ x'(0) = \beta. \tag{*}$$
Gehe dabei folgendermaßen vor:

i) Nimm zunächst an, die Lösung sei durch eine Potenzreihe darstellbar (Warum ist das sinnvoll?):
$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$
Setze diese Darstellung in (*) ein und führe dann einen Koeffizientenvergleich durch.

ii) Zeige, dass die so erhaltene Reihe einen Konvergenzradius $\rho > 0$ besitzt und eine eindeutige Lösung darstellt.

Wir wünschen Euch frohe Festtage und ein gutes neues Jahr!