Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
05.12.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

4. Übung

G13 (Spezielle Lösung)
Sei $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem von Lösungen eines homogenen linearen DGL-Systems mit konstanten Koeffizienten, $x'(t) = Ax(t)$.
Wir schreiben $\Phi(t)$ für die Matrix $\Phi(t) := (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t))$, d.h., wir schreiben die Fundamentallösungen $\phi_i(t)$ in die Spalten der Matrix $\Phi(t)$.

Zeige, dass dann $x(t) = \Phi(t)u(t)$ mit $u(t) = \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1} f(s)\, ds$ eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ ist.

Hinweis: Dieses Vorgehen spart oft einige Rechenschritte, da man keine Exponentialmatrix aus der Eigen- bzw. Hauptvektorbasis rücktransformieren muß.

G14 (Lineare DGLen)

i) Löse die Differentialgleichung
$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} x \\ \sin x \end{pmatrix}$$
mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$.

ii) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y'(t) - y(t) = \sinh t\ .$$

G15 (System 2.Ordnung)
Betrachte folgendes DGL-System 2. Ordnung mit Konstanten m_i, k_i:
$$\begin{aligned} m_1 x''(t) &= -\, k_1 x(t) - k_2(x(t) - y(t)) \\ m_2 y''(t) &= k_2(x(t) - y(t)\ . \end{aligned}$$

i) Überlege dir, wie man dieses System in ein DGL-System 1.Ordnung überführen kann und stelle dieses auf.

ii) Bestimme dann die allgemeine Lösung zu den Werten $m_1 = 4$,$k_1 = 8$, $m_2 = 2$, $k_2 = 4$.

iii) Für Physiker: Skizziere gekoppelte Massen und Federn, deren Schwingungen mit obigem DGL-System beschrieben werden können.

G16 (Inhomogene DGLen)
Sei eine inhomogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten
$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_0 y = e^{\mu t}$$
mit $\mu \in \mathbb{C}$ gegeben.

i) Zeige: Falls μ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C}$, sodass $\phi(t) = \alpha e^{\mu t}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist.Was ergibt sich für α?

ii) Finde eine spezielle Lösung der Differentialgleichung
$$y^{(3)}(t) - 2y^{(2)}(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 2 \sin t\ .$$
Verwende hierzu, dass alle Koeffizienten reell sind.

H10 (Lineare DGLen) 4 Punkte

i) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) + 2y''(t) + y(t) = 25e^{2t} \ .$$

ii) Bestimme die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

H11 (Lösungen linearer DGLen) 4 Punkte

Seien $x(t)$ und $y(t)$ Lösungen des Systems von DGL $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ mit Anfangsbedingungen $x(0)$ und $y(0)$.

i) Finde für $||x(t) - y(t)||$ eine nicht-triviale Abschätzung nach oben. Schreibe hierfür $x(t)$ und $y(t)$ als $x(t) = x_h(t) + \phi(t)$ bzw. $y(t) = y_h(t) + \phi(t)$ mit ein und derselben speziellen Lösung $\phi(t)$.

ii) Zeige: Besitzt A nur Eigenwerte mit negativem Realteil, dann gilt $\lim_{t\to\infty}(x(t) - y(t)) = 0$.

H12 (Fast-invariante Funktionen) 4 Punkte

Sei $Y = C^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $y \in Y$ und $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ sei $L(y) = a_1 y' + a_0 y$, insbesondere ist $L : Y \to Y$ eine lineare Abbildung.

Definition: Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ heißt *fast-L-invariant*, falls

$$\dim span\{L^n(f) : n \in \mathbb{N}_0 \} < \infty \ , \quad \text{wobei } L^0(f) = f.$$

i) Sei $V(f) = span\{L^n(f) : \ n \in \mathbb{N}_0\}$. Zeige:
f ist fast L-invariant $\Leftrightarrow$ Es gibt ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit $V(f) = span\{f, L(f), \ldots, L^N(f)\}$ und $\{f, L(f), \ldots, L^N(f)\}$ linear unabhängig.

ii) Eine Funktion f ist genau dann L-fast-invariant, wenn es einen endlich-dimensionalen linearen Teilraum $V \subset C^\infty(\mathbb{R})$ gibt, sodass $L(V) \subseteq V$ und $f \in V$.

iii) Sei $L_1(y) = y' + ay, \ a \in \mathbb{R}$ konstant. Gebe einige Klassen von fast-L_1-invarianten Funktionen an.

iv) Sind f, g fast-L-invariant, dann auch $f + g$. Ist f fast-L-invariant und $V(f) \cap \ker(L) = \{0\}$, dann gibt es ein $y \in V(f)$ mit $L(y) = f$.

v) Bestimme die allgmeine Lösung der DGL $y' = -y + x^6$.

vi) Was hat das mit G16 zu tun?