Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
20.11.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

3. Übung

G09 (Lineare DGLen)
Finde für jede Skizze von Vektorfeldern (Phasenpotraits) in Abb.1 eine Matrix mit ähnlichem Vektorfeld.

G10 (Jordansche Normalform)

i) Bildet neue Gruppen, sodass in jeder Gruppe mindestens eine Person in der Lage ist, zu einer Matrix eine Basis aus Eigen -und Hauptvektoren zu bestimmen (Stichwort: Jordansche Normalform).

ii) Erklärt bzw. lasst euch erklären, wie man eine Basis aus Eigen- und Hauptvektoren zu einer Matrix bestimmt. Verwendet, wenn ihr möchtet, die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

iii) Verwendet eure Kenntnisse nun dazu, ein Fundamentalsystem der DGL $x'(t) = Ax(t)$ für obiges A zu gewinnen.

G11 (Gedämpfter Oszillator)
Wir betrachten die Differentialgleichung eines ungedämpften harmonischen Oszilators

$$x''(t) + x(t) = f(t).$$

Verwende das Verfahren zur Reduktion der Ordnung und bestimme dann die allgemeine Lösung.

G12 (Asymptotisches Verhalten)
Sei $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ eine lineare Abbildung und sei $x(t): \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ eine Lösung von $x'(t) = Ax(t)$ mit $x(t_0) = x_0$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Gib Bedingungen dafür an, dass $\lim_{t\to\infty} ||x(t)|| = \infty$ oder dass $\lim_{t\to\infty} ||x(t)|| = 0$.

i) Orientiere dich zuerst an den Abbildungen in G09 und stelle Vermutungen an.

ii) Nimm an, A sei diagonalisierbar.

iii) Betrachte jetzt den allgemeinen Fall.

Heißt das, dass für alle Lösungen $||x(t)|| \to \infty$ oder $||x(t)|| \to 0$ gilt? Gibt es andere Fälle?

H07 (Lineares AWP) 4 Punkte

Bestimme die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung $x'(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} x(t)$.

Löse dann das AWP $x(0) = (1, 1, \sqrt{2} - 1)^t$.

H08 (Translation) 4 Punkte

i) Sei P_n der $n+1$-dimensionale Vektorraum aller Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich n, und sei $D: \ P_n \to P_n$ die Differentiation. Zeige, dass für jedes Polynom $p \in \ P_n$ und alle $x, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$(e^{Dt}p)(x) = p(x+t).$$

ii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ fest gegeben und sei Q_n der $n+1$-dimensionale Vektorraum aller Funktionen der Gestalt $e^{\lambda x}p(x), \ p \in \ P_n$ (der Vektorraum der so genannten "λ-Quasipolynome" vom Grade $\leq n$). Zeige, dass die Differentiation wiederum eine lineare Abbildung $D: \ Q_n \to Q_n$ definiert, und dass wiederum für jedes feste $f \in \ Q_n$ und für alle $x, t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(e^{Dt}f)(x) = f(x+t).$$

Welcher wichtige Satz aus der Analysis zeigt sich in dieser Aufgabe in neuem Licht?

H09 (Jeder Fluss genügt einer DGL) 4 Punkte

Eine Familie von linearen Abbildungen $T_t \in \ L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \ t \geq 0$ bildet einen Fluss (vgl. 2.8.6 Vorlesung), falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

1. $T_0 = \mathbb{1}$,
2. $T_{s+t} = T_s T_t$ für alle $s, t \geq 0$,
3. $\lim_{t \to 0} ||T_t - \mathbb{1}||_{op} = 0$.

Zeige, dass für einen Fluss genau ein $A \in \ \mathrm{Ł}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ existiert, sodass $T_t = e^{tA}$. Orientiere dich bei deinem Beweis entlang der Punkte i)-iv).

i) Zeige, dass für hinreichend kleine $\epsilon > 0$ die Abbildung $\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T_s \, ds$ invertierbar ist. Zeige hierfür, dass $||\mathbb{1} - \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon T_s \, ds||_{op} \leq 1$.

ii) Zeige, dass T_t an der Stelle $t = 0$ differenzierbar ist. Betrachte hierfür $\frac{T_h - \mathbb{1}}{h}\int_0^\epsilon T_s \, ds$ und benutzte i).

iii) Zeige nun, dass T_t an jeder Stelle differenzierbar ist.

iv) Setze $A := (T_t)'|_{t=0}$. Finde dann eine DGL, der T_t genügt, um daraus $T_t = e^{At}$ zu folgern.

iv) Wieso muss A eindeutig sein?

Ergänzung: Der Beweis zeigt: Die Aussage gilt ebenso für T_t aus $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$. Besonders wichtig ist der Fall eines unitären Flusses U_t (man sagt auch, einer unitären Einparameter-Gruppe). In diesem Fall gibt es also eine Matrix mit $U_t = e^{iAt}$; man sieht leicht, in diesem Fall ist A selbstadjungiert.

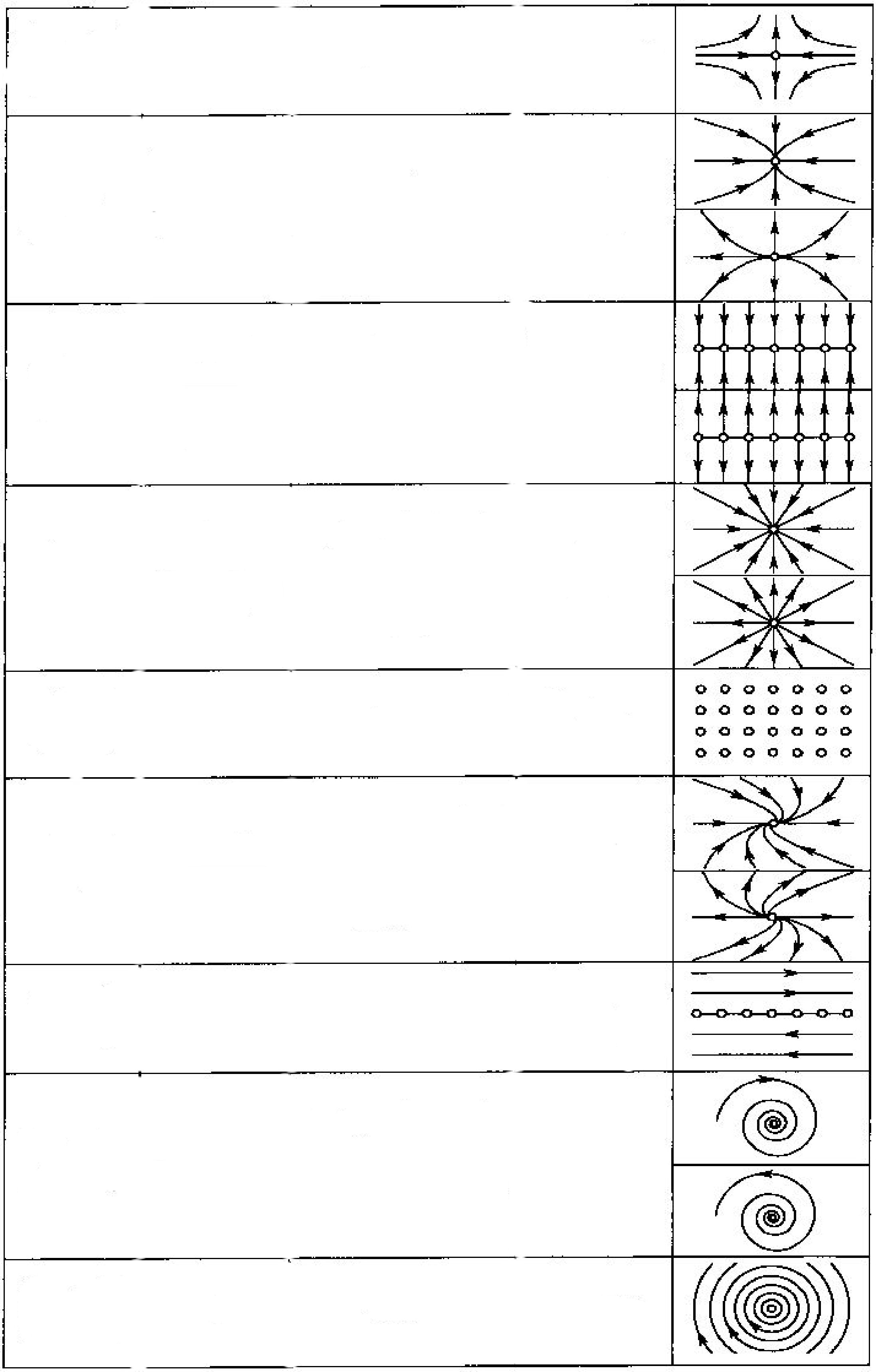

Abbildung 1: