Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 07/08
06.11.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

2. Übung

G05 (Lineares AWP)
Finde eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

G06 (Exponentialmatrix)

i) Finde ein Beispiel für eine geeignete lineare Abbildungen $S, T : V \to V$ (V geeignet), sodass

$$e^S e^T \neq e^{S+T}.$$

ii) Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimme e^{At} und e^{Bt}.

iii) Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & a \\ -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$, $a > 0$. Berechne e^{At}.

Hinweis: Finde eine invertierbare Abbildung S, sodass $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (allgemeiner harmonischer Oszillator).

G07 (Invariante Teilräume)

i) Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, die den linearen Teilraum $E \subset \mathbb{R}^n$ invariant läßt. Sei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $x'(t) = Ax(t)$ mit $x(t_0) \in E$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass dann $x(t) \in E$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

ii) Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, deren Exponentialmatrix e^{At} den linearen Teilraum E für alle $t \in \mathbb{R}$ invariant läßt. Zeige, dass dann auch A den Teilraum invariant läßt.

G08 (Symmetrie)
Betrachte die lineare DGL

$$x'(t) = Ax(t). \tag{*}$$

Sei $x(t)$ eine Lösung von (*) und $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare invertierbare Abbildung.

a) Zeige: $y(t) := Sx(t)$ genügt ebenfalls einer linearen DGL. Bestimme diese DGL.

b) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Eine invertierbare lineare Abbildung $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Symmetrie des Vektorfeldes, falls $f(S(x)) = S(f(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Zeige:
   i) Die Menge aller linearer Symmetrien bildet eine Gruppe bzgl. Hintereinanderausführung.
   ii) S ist Symmetrie des linearen Vektorfeldes $f(x) = Ax$ für eine lineare Abbildung A genau dann, wenn S mit A kommutiert.
   iii) In diesem Fall gilt: Ist $x(t)$ Lösung von (*), dann ist auch $Sx(t)$ Lösung von (*).
   iv) In diesem Fall gilt: $x(t)$ ist stationäre (periodische) Lösung von (*) genau dann wenn $Sx(t)$ stationäre (periodische) Lösung von (*).
   (Eine Lösung $x(t)$ ist stationär, falls $x(t) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und periodisch, falls ein $T \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existiert, sodass $x(t) = x(t+T)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.)

H04 (Lineare DGL) 4 Punkte

Bestimme eine 3×3-Matrix A, sodass die Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt.

H05 (Exponentialmatrix) 4 Punkte

Zeige, dass es keine reelle 2×2-Matrix S geben kann, sodass $e^S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

H06 (Flüsse) 4 Punkte

Betrachte die lineare DGL

$$x'(t) = Ax(t)$$

und sei $\Phi(t) = e^{At}$ der zugehörige Fluss.

i) Zeige: Unter diesem Fluss ändert sich ein beliebiges Volumen innerhalb eines Intervalls der Länge t um den Faktor $e^{tr(A)t}$.

ii) Zeige: Für das lineare Vektorfeld $x \mapsto Ax$ sind äquivalent:

   a) Das Vektorfeld ist divergenzfrei;

   b) der Fluss ist volumenerhaltend.

iii) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Skizziere in der Ebene für einige Zeiten das Bild einiger Quadrate (oder Deiner Lieblingsfigur) unter dem zugehörigen Fluss.