Prof. B. Kümmerer
N. Sissouno

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 07/08
24.10.2007

Analysis III für M. & Ph.: Differentialgleichungen

1. Übung

G01 (Vektorfeld)
Betrachte folgendes System von linearen Differentialgleichungen

$$y_1' = -y_1, \quad y_2' = 2y_2.$$

Skizziere das dazugehörige Vektorfeld $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

G02 (System von linearen DGLen)
Sei A eine $n \times n$-Matrix. Betrachte das dazugehörige System von Differentialgleichungen

$$x'(t) = Ax(t).$$

Angenommen, der Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}x_0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ x_0 \in \mathbb{C}^n$ liefere eine Lösung, was läßt sich über λ und x_0 aussagen?

G03 (Vektorfelder und Richtungsfelder)
Welche Informationen kannst du aus den Vektorfeldern in Abb.1-Abb.5 (siehe Blattrückseite) gewinnen. Stichworte: Richtungsfeld, lineares System von DGLen, autonome DGL.

G04 (Exponentialmatrix)
Für eine lineare Abbildung $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definieren wir

$$e^T := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

(Mache dir keine Gedanken wegen der Konvergenz. Näheres vgl. Vorlesung.)

i) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimme e^{At}.

ii) Sei T eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $a_1, \ldots, a_n$. Zeige, dass e^T wiederum eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $e^{a_1}, \ldots, e^{a_n}$ ist.

iii) Seien $A, S \in M_n$ und sei S invertierbar. Zeige, dass dann $Se^AS^{-1} = e^{SAS^{-1}}$ gilt.

H01 (Reduktion der Ordnung) 4 Punkte
Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, $\mathbb{R} \supseteq I \ni t \mapsto k(t) \in \mathbb{R}$ stetig. Für $y: \mathbb{R} \supseteq T \ni t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$ sei

$$x(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Zeige: y erfüllt die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots a_1 y'(t) + a_0 y(t) = k(t)$$

genau dann, wenn $x(t)$ die lineare Differentialgleichung

$$x'(t) = Ax(t) + b(t)$$

erfüllt mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ und $b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k(t) \end{pmatrix}$.

H02 (Operatornorm) 4 Punkte
Sei $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n) := \{T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : T \text{ linear}\}$ die Menge der linearen Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^n$. Auf $B(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ ist die Operatornorm eines Operators $T \in B(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ wie folgt definiert

$$||T||_{op} := \sup\{||Tx||, ||x|| \leq 1\}.$$

i) Seien $S, T \in B(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$. Zeige, dass $||ST||_{op} \leq ||S||_{op} \cdot ||T||_{op}$ gilt.

ii) Sei $T \in B(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$. Zeige, dass $||T^n||_{op} \leq ||T||_{op}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt.

H03 (Exponentialmatrix) 4 Punkte
Sei M_n die Menge der $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$. Für $A \in M_n$ definieren wir die Spur von A als die Summe der Diagonalelemente von A, d.h.,

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \; .$$

i) Zeige, dass für all $A_1 \ldots, A_m \in M_n$ gilt:

$$tr(A_1 \cdot A_2 \cdots A_m) = tr(A_m \cdot A_1 \cdots A_{m-1}).$$

ii) Zeige, dass für alle $A \in M_n$ gilt:

$$\det e^A = e^{tr(A)}.$$

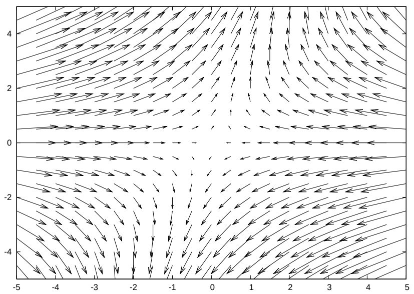

Abbildung 1:

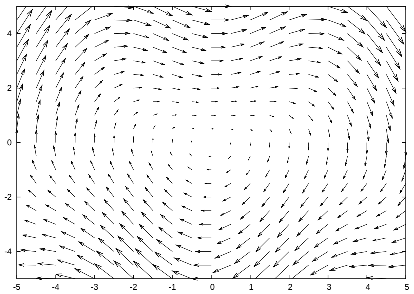

Abbildung 2:

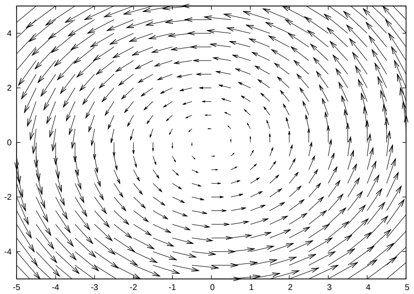

Abbildung 3:

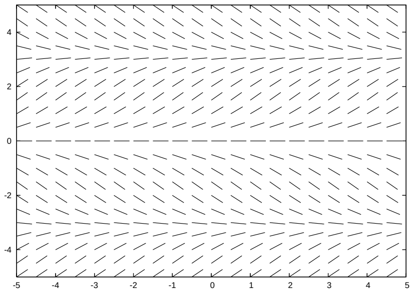

Abbildung 4:

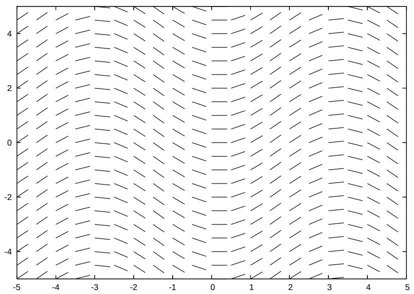

Abbildung 5: