Kapitel 0

Mathematische Ergänzungen

0.1 Mengen und Mengenoperationen

Unter einer *Menge* versteht man die Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (sog. *Elemente* der Menge) zu einem Ganzen.

Eine Menge kann man

- durch Aufzählen ihrerer Elemente, oder
- durch Angabe einer Eigenschaft

$$M = \{x | x \text{ hat Eigenschaft } E\}$$

beschreiben.

Beispiel 0.1.1. (a) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, die Menge der natürlichen Zahlen.

(b) $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

(c) $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, die Menge der ganzen Zahlen.

(d) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$, die Menge der rationalen Zahlen.

(e) $\mathbb{R} = \{x | x \text{ ist reelle Zahl}\}$, die Menge der reellen Zahlen. Bei den reellen Zahlen handelt es sich um Zahlen mit evtl. nicht abbrechender Dezimalbruchdarstellung, wie z.B. $12,72531\dots$ oder $-3,1415\dots$.

Notation 0.1.2. • $a \in M$ bedeutet a ist Element von M.

- $a \notin M$ bedeutet a ist kein Element von M.

Beispiel 0.1.3.

$$1,5 \notin \mathbb{N}; 1,5 \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Definition 0.1.4. Für die *leere Menge* - die Menge, die kein Element enthält - schreiben wir das Symbol $\emptyset$. [1]
Sind A, B Mengen, so schreiben wir:

(a) $A = B$, falls beide Mengen die gleichen Elemente enthalten.

(b) $A \subseteq B$, falls jedes Element von A auch in B enthalten ist. („A ist Teilmenge von B.“).

Beispiel 0.1.5.

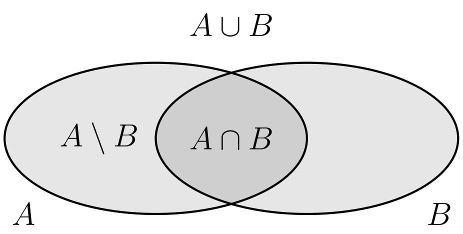
$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\} \subseteq \mathbb{N}, \{1, \sqrt{2}, 3\} \nsubseteq \mathbb{N}$$

Definition 0.1.6. Für Mengen A und B definieren wir:

(a) $A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$, die Vereinigung der Mengen A und B.

(b) $A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$, der Schnitt der Mengen A und B.

(c) $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\}$, die Differenz der Mengen A und B.



Definition 0.1.7. Sei A eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von A heißt die Potenzmenge von A. Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{P}(A)$, d.h.

$$\mathcal{P}(A) = \{M | M \subseteq A\}.$$

Beispiel 0.1.8. (a) $\mathcal{P}(\{1, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$

(b) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

(c) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Satz 0.1.9. *Seien A, B und C Mengen. Dann gelten die de Morgan'schen Regeln. D.h. es gilt:*

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

[1] $\emptyset$ wird in der Literatur auch als Zeichen für das arithmetische Mittel verwendet. In dieser Vorlesung steht es aber immer für die leere Menge.

(b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Beweis.
- Zeige: $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
  Sei $x \in A \setminus (B \cup C)$. Nach Definition der Differenz ist das äquivalent zu $x \in A$ und $x \notin (B \cup C)$. Da $B \subset (B \cup C)$, folgt daraus $x \in A$ und $x \notin B$, also $x \in A \setminus B$. Genauso folgt aber auch $x \in A$ und $x \notin C$, d.h. $x \in A \setminus C$. Somit gilt $x \in A \setminus B$ und $x \in A \setminus C$ und folglich $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
- Zeige: $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$
  Sei $x \in A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Nach Definition ist dies äquivalent zu ($x \in A$ und $x \notin B$) und ($x \in A$ und $x \notin C$). Folglich $x \in A$ und $x \notin B$ und $x \notin C$. Da $B \cup C$ gerade alle Elemente enthält die in mindestens einer der Mengen B, C sind, folgt also $x \notin (B \cup C)$. Das bedeutet $x \in A$ und $x \notin (B \cup C)$, somit $x \in A \setminus (B \cup C)$.
- Aus $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ und $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$ folgt $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Die zweite Aussage kann man analog zeigen. □

Definition und Satz 0.1.10. Sei I eine Menge. Für jedes $i \in I$ sei eine Menge B_i gegeben. Dann wird definiert:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} B_i &= \{x | \text{für mindestens ein } i \in I \text{ gilt: } x \in B_i\} \\ \bigcap_{i \in I} B_i &= \{x | \text{für alle } i \in I \text{ gilt: } x \in B_i\}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

(a) $A \setminus \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$

(b) $A \setminus \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i)$.

(ohne Beweis)

0.2 Einige nützliche Abkürzungen

Definition 0.2.1. Für $n \in \mathbb{N}$ wird definiert:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 \qquad (\text{„n-Fakultät“}) \\ 0! &= 1. \end{aligned}$$

Beispiel 0.2.2.

$$1! = 1, 2! = 2 \cdot 1 = 2, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Definition 0.2.3. Ist $a_i \in \mathbb{Z}(i \in \mathbb{Z})$, d.h. für jedes $i \in \mathbb{Z}$ sei $a_i \in \mathbb{R}$, und $k, n \in \mathbb{Z}, k \leq n$. So wird definiert:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = (a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n).$$

(„Summe der a_i für i von k bis n “).

Beispiel 0.2.4. (a) $\sum\limits_{i=2}^{5} a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

(b) $\sum\limits_{i=-1}^{3} a_i = a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 + a_3$

(c) $\sum\limits_{i=0}^{4} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$

Beispiel 0.2.5. Einer Zelle wird die Menge v Mengeneinheiten [ME] einer Substanz injiziert. Innerhalb eines Tages wird ein Teil der Substanz von der Zelle abgebaut, so dass sich am Ende des Tages noch $p \cdot 100\%$ der Substanz in der Zelle befinden.
Das Injizieren wird zu Beginn jedes Tages mit der gleichen Menge wie am Anfang wiederholt. Mit V_n bezeichnen wir die Menge der Substanz in der Zelle nach dem n-ten Tag.

$$\begin{aligned}
V_0 &= v \\
V_1 &= v + V_0 \cdot p = v + vp \\
V_2 &= v + V_1 \cdot p = v + (v + vp)p = v + vp + vp^2 \\
&\vdots \\
V_n &= v + vp + \cdots + vp^n = v \cdot \sum_{i=0}^{n} p^i
\end{aligned}$$

Wie berechnet man zu $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Summe $\sum\limits_{i=0}^{n} x^i$? Wir betrachten zunächst den Fall $x = 1$. Dann ist $x^i = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es folgt:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \sum_{i=0}^{n} 1 = (n+1) \cdot 1 = n + 1.$$

Sei jetzt $x \neq 1$. Aus

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{i=0}^{n} x^i &= \sum_{i=0}^{n} x^i - x\sum_{i=0}^{n} x^i \\
&= x^0 + \sum_{i=1}^{n} x^i - \sum_{i=0}^{n} x^{i+1} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} x^i - \sum_{i=1}^{n+1} x^i \\
&= 1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x^i - \sum_{i=1}^{n} x^i}_{=0} - x^{n+1} \\
&= 1 - x^{n+1}
\end{aligned}$$

folgt (da $x \neq 1$)

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$