Fachbereich Mathematik
M. Kohler / A. Fromkorth

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
10. Dezember 2007

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt zur „Mathematik und Statistik für Biologen“

Lösung zur Aufgabe 31 (3 Punkte)

(a)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X &= 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p \\ \mathbf{E}(X^2) &= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}Y &= \mathbf{E}(\sum_{i=1}^n X_i) \\ &\overset{\text{Eigenschaften von } \mathbf{E}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) \\ &\overset{X_i \text{ bernoulliverteilt}}{=} \sum_{i=1}^n p = n \cdot p\end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 32 (3 Punkte)

$$X = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ wobei } X_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls Ente } i \text{ überlebt} \\ 0 & \text{, falls Ente } i \text{ nicht überlebt} \end{cases}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{X_i = 1\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \\ \Rightarrow \quad & \mathbf{E}(X_i) = 1 \cdot \mathbf{P}\{X_i = 1\} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 0,349 \\ \Rightarrow \quad & \mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) \approx 10 \cdot 0,349 = 3,49 \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 33 (3 Punkte)

$$f(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & \text{für } \quad 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0 & \text{für } \quad x < 0 \text{ oder } x > \alpha \end{cases}$$

(a) f Dichte $\Rightarrow$ es muss gelten $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \overset{!}{=} 1$
Somit

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx}_{=0} + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx + \underbrace{\int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx}_{=0} \\ &= \int_0^{\alpha} \beta x dx = \frac{1}{2}\beta\alpha^2 - 0 \quad \overset{!}{=} 1\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\beta}}$$

($\alpha = -\sqrt{\frac{2}{\beta}}$ wäre zwar ebenfalls eine Lösung der Gleichung, allerdings ist α als positiv vorausgesetzt.)

(b) Sei $\alpha = 4$ und $\beta = 1/8$.

i.

$$\begin{aligned}P(X < 2) &= \int_0^2 \frac{1}{8} x dx \\ &= \left[\frac{1}{16}x^2\right]_0^2 = \frac{1}{4} = 0.25\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}P(X \geq 10) &= 1 - P(X < 10) \\ &= 1 - \int_0^4 \frac{1}{8} x dx \\ &= 1 - \left[\frac{1}{16}x^2\right]_0^4 = 1 - 1 = 0.00\end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 34 (3 Punkte)

Sei X eine Exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ.

(a)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{e^{-\lambda x}(-\lambda x - 1)}{\lambda^2}\Bigg|_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x}(-\lambda x - 1)\Big|_{x=0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\underbrace{\left(\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x}(-\lambda x - 1)\right)}_{=0} - \underbrace{e^{-\lambda \cdot 0}}_{=1} \underbrace{(-\lambda \cdot 0 - 1)}_{=-1} \right) = \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

(b) Sei jetzt $\lambda = 0.3$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X > 3\} &= 1 - \mathbf{P}\{X \leq 3\} = 1 - \int_{-\infty}^{3} f(x)dx \\ &= 1 - \int_0^3 0.3 e^{-0.3x} dx = 1 + e^{-0.3x}\Big|_{x=0}^{3} \\ &= 1 + e^{-0.9} - 1 = e^{-0.9} \approx 0.4065696597 \\ \mathbf{P}\{X > 20\} &= 1 - \mathbf{P}\{X \leq 20\} = \ldots \\ &= e^{-0.3\cdot 20} = e^{-6} \approx 0.002478752177\end{aligned}$$