Fachbereich Mathematik
M. Kohler / A. Fromkorth

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
27. November 2007

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt zur „Mathematik und Statistik für Biologen“

Lösung zur Aufgabe 23 (3 Punkte)

Bei setzen auf „ungerade“ ist der Gewinn nach einer Runde entweder 1 oder -1. Jede der Zahlen tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf ($\frac{1}{37}$).

x	-1	1
$\mathbf{P}[X = x]$	$\frac{18}{37}$	$\frac{19}{37}$

Der Gewinn beim Setzen von einer Geldeinheit auf die Zahl 7 und einer Geldeinheit auf die Zahl 10 ist der Gewinn entweder -2 (keine der beiden Zahlen tritt auf) oder 34 (eine der beiden Zahlen wird getroffen).

y	-2	34
$\mathbf{P}[Y = y]$	$\frac{35}{37}$	$\frac{2}{37}$

Damit kann $X + Y$ nur die Werte $-3, -1, 33$ oder 35 annehmen.

z	Beschreibung von $X + Y = z$	Anzahl Möglichkeiten
-3	eine gerade Zahl ungleich 10 wurde ausgewählt	$19 - 1 = 18$
-1	eine ungerade Zahl ungleich 7 wurde ausgewählt	$18 - 1 = 17$
33	10 wurde getroffen	1
35	7 wurde getroffen	1

z	-3	-1	33	35
$\mathbf{P}[X + Y = z]$	$\frac{18}{37}$	$\frac{17}{37}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{37}$

Die Spielstrategie zu $X + Y$: Der Spieler setzt eine Geldeinheit auf „ungerade“, eine Geldeinheit auf die Zahl 7 und eine Geldeinheit auf die Zahl 10.

Lösung zur Aufgabe 24 (3 Punkte)

(a) X kann nur die Werte $0, 1, 2$ oder 3 annehmen.

x	zugehörige Elementarereignisse	$\mathbf{P}[X = x]$
0	(w, w, w)	$\frac{1}{8}$
1	$(z, w, w), (w, w, z), (w, z, w)$	$\frac{3}{8}$
2	$(z, z, w), (z, w, z), (w, z, z)$	$\frac{3}{8}$
3	(z, z, z)	$\frac{1}{8}$

(b) Falls t negativ ist, ist $F(t) = 0$, da X keine negativen Werte annimmt. Der Wert von F kann sich nur an den Stellen $0, 1, 2, 3$ ändern, da dies ja alle Werte sind, die X annehmen kann.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } t < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{, falls } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{, falls } 1 \leq t < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{, falls } 2 \leq t < 3 \\ 1 & \text{, falls } 3 \leq t \end{cases}$$

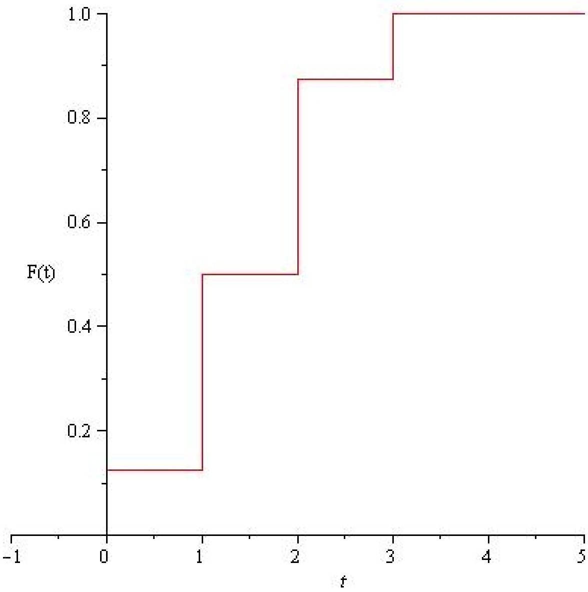

Abbildung 1: Verteilungsfunktion aus Aufgabe 24

Lösung zur Aufgabe 25 (3 Punkte)

Wir interessieren uns dafür, ob die beobachteten Werte Zufall sind oder nicht. Dazu gehen wir (hypothetisch) davon aus, dass die Hypothese H_0 richtig ist. Die in der Vorlesung vorgestellte Vorgehensweise ist dann wie folgt:

- Wir betrachten ein Zufallsexperiment, bei dem 12 lebende Pinguine und 8 tote Pinguine zufällig auf zwei Gruppen von jeweils 10 Pinguinen aufgeteilt werden.
- Wir bestimmen dann die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 7 der toten Pinguine in der ersten Gruppe sind.
- Ist diese Wahrscheinlichkeit nicht größer als $0,05$ so gehen wir davon aus, dass H_0 nicht stimmt und H_1 stimmt. Andernfalls gehen wir davon aus, dass H_0 nicht falsch ist (H_0 wird nicht abgelehnt).

Wir betrachten das Ziehen von 10 Pinguinen aus einer Gesamtmenge von 20 Pinguinen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge.
Anzahl der Möglichkeiten: $\binom{20}{10}$.
Anzahl der Möglichkeiten mit 7 toten Pinguinen: $\binom{8}{7} \cdot \binom{12}{3}$.
Anzahl der Möglichkeiten mit 8 toten Pinguinen: $\binom{8}{8} \cdot \binom{12}{2}$. Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{\binom{8}{7} \cdot \binom{12}{3} + \binom{8}{8} \cdot \binom{12}{2}}{\binom{20}{10}} = \frac{83}{8398} \approx 0,01$$

Somit wird H_0 abgelehnt und H_1 angenommen.

Lösung zur Aufgabe 26 (3 Punkte)

- $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) &\overset{Def.Reihen}{=} \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}(a_n + b_n)\right) \\ &\overset{KGderAddition}{=} \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} b_n\right) \end{aligned}$$

Bei $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\right)_N$ und $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right)_N$ handelt es sich nach Voraussetzung um konvergente Folgen (da ja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen sind). Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen erhält man dann, dass auch die Summe der Folgen gegen die Summe der beiden einzelnen Grenzwerte konvergiert. D.h.

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} b_n\right) &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right) + \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right) \\ &\overset{Def.Reihen}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\end{aligned}$$

- Der Beweis verläuft analog...

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) &\overset{Def.Reihen}{=} \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}(a_n - b_n)\right) \\ &\overset{KGderAddition}{=} \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N} b_n\right)\end{aligned}$$

Bei $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} a_n\right)_N$ und $\left(\sum\limits_{n=1}^{N} b_n\right)_N$ handelt es sich nach Voraussetzung um konvergente Folgen (da ja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen sind). Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen erhält man dann, dass auch die Differenz der Folgen gegen die Differenz der beiden einzelnen Grenzwerte konvergiert. D.h.

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N} b_n\right) &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right) - \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} b_n\right) \\ &\overset{Def.Reihen}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\end{aligned}$$