Fachbereich Mathematik
M. Kohler / A. Fromkorth

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
17. Januar 2008

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt zur „Mathematik und Statistik für Biologen"

Lösung zur Aufgabe 39

(a) Das α-Fraktil der Standardnormalverteilung wird gewöhnlich mit u_α bezeichnet. Mit dieser Bezeichnungsweise suchen wir also die Werte $u_{0.05}, u_{0.025}, u_{0.01}$ und $u_{0.005}$.
Für u_α gilt:

$$F(u_\alpha) = \mathbf{P}[X \le u_\alpha] = 1 - \alpha$$

Wir suchen also x-Wert in der Tabelle, mit $\Phi(x) \approx 1 - \alpha$. Um $u_{0.05}$ zu finden sucht man in der Zeile von $\Phi(x)$ nach dem Wert $1 - 0.05$ also nach 0.95. Der zugehörige x-Wert ist $u_{0.05}$.

$$\begin{aligned} u_{0.05} &\approx 1.7 \\ u_{0.025} &\approx 2.0 \\ u_{0.01} &\approx 2.4 \\ u_{0.005} &\approx 2.6 \end{aligned}$$

(b) Für die t-Verteilung gilt (vgl. Bemerkung in der Aufgabenstellung)

$$\mathbf{P}[|X| \le F_{\frac{\alpha}{2}}] = 1 - \alpha.$$

Also ist

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \text{ und } \beta = \frac{\alpha}{2} = 0.025.$$

Gesucht ist also das 0.025-Fraktil der t-Verteilung mit 10 Freiheitsgraden. Dies kann man einfach in der Tabelle ablesen, also

$$t_{0.025,10} = 2.23.$$

Begründung der Bemerkung: Für eine Verteilungsfunktion F mit symmetrischer Dichte gilt immer

$$F(-q) = 1 - F(q).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[|X| \le q] &= \mathbf{P}[-q \le X \le q] = F(q) - F(-q) && (1) \\ &\overset{s.o.}{=} F(q) - (1 - F(q)) = 2 \cdot F(q) - 1 \overset{!}{=} 1 - \alpha && (2) \\ \Rightarrow\quad & 2 \cdot F(q) = 2 - \alpha && (3) \\ \Leftrightarrow\quad & F(q) = 1 - \frac{\alpha}{2} && (4) \end{aligned}$$

Das heißt aber, dass q gerade das $\frac{\alpha}{2}$-Fraktil der Verteilung sein muss.

Lösung zur Aufgabe 40

Die Zufallsvariable X beschreibe die zufällige Anzahl der Eier in einer Eikapsel aus dem betrachteten Gebiet und $X_1, \ldots, X_{37}$ seien die Zufallsvariable, welche die einzelnen Ergebnisse der Stichprobe repräsentieren (man geht übrigens davon aus, dass diese Zufallsvariablen unabhängig identisch normalverteilt sind). Gegeben sind $n = 37, \hat{\sigma} = \sqrt{\mathbf{Var}(X)} = 2.03$, das empirische arithmetische Mittel $\hat{\mu} = 8.07$ und $\alpha = 0.95$. Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist

$$Z = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\mathbf{Var}(X)}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbf{E}(X) \right)$$

eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Wir suchen jetzt ein δ mit

$$\mathbf{P}[|Z| \leq \delta] = \Phi(\delta) - \Phi(-\delta) = 2 \cdot \Phi(\delta) - 1 = 0.95.$$

D.h.:

$$\Phi(\delta) = \frac{0.95 + 1}{2} = 0.975.$$

Wir suchen deshalb in der Tabelle der Werte der Standardnormalverteilungsfunktion nach Wert x für den die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung den Wert 0.975 hat. Wir wählen demnach

$$\delta = u_{0.025} \approx 2.0.$$

Nach der Vorlesung gilt dann

$$\mathbf{P}\left[\mathbf{E}X \in \left[\hat{\mu} - u_{0.025} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{Var}(X)}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + u_{0.025} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{Var}(X)}}{\sqrt{n}}\right]\right] = 0.95.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mu} - u_{0.025} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{Var}(X)}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + u_{0.025} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{Var}(X)}}{\sqrt{n}}\right] &= \left[8.07 - 2 \cdot \frac{2.03}{\sqrt{37}}, 8.07 + 2 \cdot \frac{2.03}{\sqrt{37}}\right] \\ &= [7.402540112, 8.737459888] \end{aligned}$$

ein Konfidenzintervall zum gewünschten Konfidenzniveau.

Lösung zur Aufgabe 41

Die Zufallsvariable X beschreibe die Energierate eines Eissturmvogels und $X_1, \ldots, X_8$ seien die Zufallsvariable, welche die einzelnen Ergebnisse der Stichprobe repräsentieren (mit den gleichen Annahmen wie oben). Gegeben sind $n = 8$, die empirische Standardabweichung $\hat{\sigma} = 894.37$, das empirische arithmetische Mittel $\hat{\mu} = 1563.78$ und $\alpha = 0.95$. Nach der Vorlesung ist

$$Z = \frac{\sqrt{n}}{\hat{\sigma}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbf{E}(X) \right)$$

eine t-verteilte Zufallsvariable mit 7 Freiheitsgraden. Wir suchen jetzt ein δ mit

$$\mathbf{P}[|Z| \leq \delta] = 0.95.$$

Man muss also in der Tabelle der Verteilungsfunktion der t-Verteilung mit 7 Freiheitsgraden nach dem Wert x suchen, für den $F(x) = 0.975$ ist. Wir wählen demnach

$$\delta = 2.36.$$

Nach der Vorlesung gilt dann

$$\mathbf{P}\left[\mathbf{E}X \in \left[\hat{\mu} - t_{0.025,7} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + t_{0.025,7} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right] = 0.95.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\left[\hat{\mu} - t_{0.025,7} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{Var}(X)}}{\sqrt{8}}, \hat{\mu} + t_{0.025,7} \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{Var}(X)}}{\sqrt{8}}\right] &= \left[1563.78 - 2.36 \cdot \frac{894.37}{\sqrt{8}}, 1563.78 + 2.36 \cdot \frac{894.37}{\sqrt{8}}\right] \\ &= [817.5301918, 2310.029808]\end{aligned}$$

ein Konfidenzintervall zum gewünschten Konfidenzniveau.