Fachbereich Mathematik
M. Kohler / A. Fromkorth

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
14. Januar 2008

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt zur „Mathematik und Statistik für Biologen“

Lösung zur Aufgabe 35 (3 Punkte)

(a) Für jede Zufallsvariable X gilt:

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X)^2] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}X)^2.$$

Sei X jetzt eine auf dem Intervall (a, b) gleichverteilte Zufallsvariable.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x \cdot 0dx + \int_{a}^{b} x \cdot \frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{\infty} x \cdot 0dx \\
&= = 0 + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \Big|_{x=a}^{b} + 0 = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \cdot b^2 - \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \\
&= \frac{b+a}{2} \\
\mathbf{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_{a}^{b} x^2 \cdot \frac{1}{b-a}dx \\
&= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_{x=a}^{b} = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) \\
\mathbf{Var}(X) &= \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2) - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{12}(a-b)^2
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X+Y) &= \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b+a) = b+a \\
\mathbf{Var}(X+Y) &\overset{X,Y \text{ unabhängig}}{=} \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y) \\
&= \frac{1}{12}(a-b)^2 + \frac{1}{12}(a-b)^2 = \frac{1}{6}(a-b)^2
\end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 36 (3 Punkte)

Für eine diskrete Zufallsvariable X, die nur die Werte $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ annimmt, gilt:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathbf{P}[X = x_k].$$

Allgemeiner gilt für eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Formel

$$\mathbf{E}(h(X)) = \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k) \cdot \mathbf{P}[X = x_k].$$

(a) Da X nur die Werte $2, 4$ und 5 mit einer Wahrscheinlichkeit größer 0 annimmt, ergibt obige Formel:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= 2 \cdot \mathbf{P}[X = 2] + 4 \cdot \mathbf{P}[X = 4] + 5 \cdot \mathbf{P}[X = 5] \\
&= 2 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.4 + 5 \cdot 0.3 = 3.7 \\
\mathbf{E}X^2 &= 2^2 \cdot \mathbf{P}[X = 2] + 4^2 \cdot \mathbf{P}[X = 4] + 5^2 \cdot \mathbf{P}[X = 5] \\
&= 4 \cdot 0.3 + 16 \cdot 0.4 + 25 \cdot 0.3 = 1.2 + 6.4 + 7.5 = 15.1 \\
\mathbf{Var}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}X)^2 = 15.1 - (3.7)^2 = 15.1 - 13.69 = 1.41
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= 1 \cdot \mathbf{P}[X = 1] + 0 \cdot \mathbf{P}[X = 0] = p \\
\mathbf{E}(X^2) &= 1^2 \cdot \mathbf{P}[X = 1] + 0^2 \cdot \mathbf{P}[X = 0] = p \\
\mathbf{Var}(X) &= \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}(Z) &= \mathbf{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&\overset{X_1,\ldots,X_n \text{ unabhängig}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Var}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p(1 - p) = n \cdot p(1 - p)
\end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 37 (3 Punkte)

$$\begin{aligned}
f(p) &= \mathbf{P}_p[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{10} = x_{10}] \\
&\overset{X_1,\ldots,X_{10} \text{ unabhängig}}{=} \mathbf{P}_p[X_1 = x_1] \cdot \mathbf{P}_p[X_2 = x_2] \cdot \cdots \cdot \mathbf{P}_p[X_{10} = x_{10}] \\
&= p^{x_1 + \cdots + x_{10}} (1 - p)^{10 - (x_1 + \cdots + x_{10})} = p^4 (1 - p)^6 \\
f'(p) &= 4p^3 \cdot (1 - p)^6 + p^4 \cdot 6 \cdot (1 - p)^5 \cdot (-1) \\
&\overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Umstellen dieser Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}
4p^3(1 - p)^6 &= 6p^4(1 - p)^5 \\
4(1 - p) &= 6p \\
4 &= 10p \\
p &= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Zusatz – Bestimmung des Maximum-Likelihood-Schätzers für bernoulliverteilte Zufallsvariablen:
Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige bernoulliverteilte Zufallsvariablen mit unbekanntem Parameter p. Ausgahend von der Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ wollen wir den Wert von p schätzen. Die zu maximierende Funktion ist also

$$f(p) = \mathbf{P}_p[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n].$$

Da $X_1, \dots, X_n$ unabhängig sind kann man dies Funktion zu

$$f(p) = \mathbf{P}_p[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot [X_n = x_n]$$

umschreiben. Nutzt man jetzt noch aus, dass die Zufallsvariablen alle bernoulliverteilt mit Parameter p sind, erhält man

$$f(p) = p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \cdot \dots \cdot p^{x_n}(1-p)^{1-x_n} = p^{x_1+\dots+x_n}(1-p)^{n-(x_1+\dots+x_n}.$$

Da diese Funktion bei p maximal werden soll, gilt $f'(p) = 0$.

$$\begin{aligned}
f'(p) &= (x_1 + \dots + x_n)p^{x_1+\dots+x_n-1}(1-p)^{n-(x_1+\dots+x_n)} \\
&\quad + p^{x_1+\dots+x_n}(n - (x_1 + \dots + x_n))(1-p)^{n-(x_1+\dots+x_n)-1}(-1) \\
&= p^{x_1+\dots+x_n-1}(1-p)^{n-(x_1+\dots+x_n)-1}((x_1 + \dots + x_n)(1-p) - (n - (x_1 + \dots + x_n))p) \\
&= p^{x_1+\dots+x_n-1}(1-p)^{n-(x_1+\dots+x_n)-1} \\
&\quad \cdot((x_1 + \dots + x_n) - (x_1 + \dots + x_n)p - np + (x_1 + \dots + x_n))p) \\
&= p^{x_1+\dots+x_n-1}(1-p)^{n-(x_1+\dots+x_n)-1}((x_1 + \dots + x_n) - np) \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Somit erhält man

$$p = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Lösung zur Aufgabe 38 (3 Punkte)

Notwendige Bedingung zum Vorliegen einer Wendestelle, d.h. nur wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann ein Wendepunkt vorliegen:

$$pH''(x) = 0.$$

$$\begin{aligned}
pH'(x) &= \left(\frac{a}{1+e^{-x+b}} + c\right)' = \left(\frac{a}{1+e^{-x+b}}\right)' = -\frac{a \cdot (e^{-x+b})'}{(1+e^{-x+b})^2} = \frac{a \cdot e^{-x+b}}{(1+e^{-x+b})^2} \\
pH''(x) &= \left(\frac{a \cdot e^{-x+b}}{(1+e^{-x+b})^2}\right)' \\
&= \frac{(1+e^{-x+b})^2 \cdot (-a) \cdot e^{-x+b} + a \cdot e^{-x+b} \cdot 2 \cdot (1+e^{-x+b}) \cdot e^{-x+b}}{(1+e^{-x+b})^4} \\
&= a \cdot e^{-x+b} \cdot \left(\frac{2 \cdot e^{-x+b} - (1+e^{-x+b})}{(1+e^{-x+b})^3}\right) = a \cdot e^{-x+b} \cdot \left(\frac{e^{-x+b} - 1}{(1+e^{-x+b})^3}\right) \overset{!}{=} 0 \\
\Rightarrow &\quad 1 = e^{-x+b} \Rightarrow 0 = -x + b \Rightarrow x = b
\end{aligned}$$

Als Kandidaten für einen Wendepunkt erhalten wir somit

$$(b|pH(b)) = \left(b \,\middle|\, \frac{a}{2} + c\right).$$

Um sicher zu gehen, dass auch wirklich ein Wendepunkt an diese Stelle vorliegt, muss man jetzt noch prüfen, dass $pH'''(x) \neq 0$ gilt.