Fachbereich Mathematik
M. Kohler / A. Fromkorth

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
8. Januar 2008

8. Übungsblatt zur „Mathematik und Statistik für Biologen"

Aufgabe 27 (3 Punkte)

Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist folgendermaßen definiert:

$$\Phi : \mathbb{R} \to [0,1], \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

Der Funktionswert von Φ an der Stelle x ist also die Fläche zwischen der Funktion $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ und der x-Achse über dem Intervall $(-\infty, x]$.

In der folgenden Tabelle sind einige Funktionswerte der Standardnormalverteilung abgebildet.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\Phi(x)$	0.5	0.54	0.579	0.618	0.655	0.692	0.726	0.758	0.788	0.816	0.841

(a) Skizzieren Sie qualitativ die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

für $t \in [-4, 4]$.

(b) Begründen Sie Anhand der Skizze aus Teil (a), dass gilt:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

(c) Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable, d.h. eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion Φ. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

i. $\mathbf{P}\{X \leq 0.4\}$
ii. $\mathbf{P}\{X > 0.7\}$
iii. $\mathbf{P}\{0.1 < X \leq 0.2\}$

Aufgabe 28 (3 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Dichte der Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ ist definiert als

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } t \leq a \\ \frac{1}{b-a} & , \text{ falls } a < t \leq b \\ 0 & , \text{ falls } b < t \end{cases}$$

Der Funktionswert an der Stelle t der Verteilungsfunktion der Gleichverteilung ist dann die Fläche zwischen der Funktion f und der x-Achse über dem Intervall $(-\infty, x]$.

(a) Zeichnen Sie die Funktion f für $a = 2$ und $b = 4$.

(b) Bestimmen Sie die den Funktionswert der Verteilungsfunktion der Gleichverteilung an der Stelle b. Welchen Funktionswert hat diese Funktion an einer Stelle x_0 mit $x_0 > b$?

(c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a und b das Argument, für das die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung den Funktionswert $\frac{1}{2}$ hat.

Bemerkung: Durch die Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ wird das zufällige Auswählen einer reellen Zahl aus dem Intervall $[a, b]$ beschrieben.

Aufgabe 29 (3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \mathbb{R}$. Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ die Verteilungsfunktion von $\mathbf{P}$ definiert durch $F(x) = \mathbf{P}((-\infty, x])$ für $(x \in \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) $F(x) \in [0, 1]$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) F ist monoton wachsend, d.h. für $x_1 \leq x_2$ gilt $F(x_1) \leq F(x_2)$.

Bemerkung: Für die Verteilungsfunktion gilt außerdem

- $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- Für $x_1 \geq x_2 \geq \ldots$ mit $x_n \to x \in \mathbb{R}$ $(n \to \infty)$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} F(x_n) = F(x)$.

Aufgabe 30 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 5x + 2$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = 2e^t$

(c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

(d) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(y) = e^{\sin(y)}$