Fachbereich Mathematik
M. Kohler / A. Fromkorth

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
27. November 2007

7. Übungsblatt zur „Mathematik und Statistik für Biologen“

Aufgabe 23 (3 Punkte)

Bei dem Glücksspiel Roulette sind auf einer drehbaren Scheibe die Zahlen von 0 bis 36 abgedruckt. Jede dieser Zahlen kennzeichnet ein Fach. Jeder Spieler hat in jeder Runde die Möglichkeit einen Geldbetrag auf durch die Spielregeln festgelegte Zahlenkombinationen zu setzen. Mit Hilfe einer kleinen Kugel, die zufällig in einem der Nummernfächer zum liegen kommen kann, wird eine der Zahlen ausgewählt. Vereinfachend gehen wir davon aus, dass nur folgende Spielmöglichkeiten erlaubt sind:

- Ein Spieler kann einen Betrag von einer Geldeinheit auf „ungerade“ setzten. Fällt eine ungerade Zahl, wird diesem Spieler der Einsatz und zusätzlich eine Geldeinheit ausgezahlt. (Wird keine ungerade Zahl ausgewählt verliert er den gesetzten Betrag).
- Ein Spieler kann auf eine einzelne Zahl setzen. Bleibt die Kugel im entsprechenden Nummernfach liegen, erhält der Spieler 35 Geldeinheiten und den gesetzten Betrag. Ansonsten verliert er den gesetzten Betrag.

Die Zufallsvariable X ordne jedem Elementarereignis (d.h. die in einer Runde auftretende Gewinnzahl) den Gewinnbetrag zu, den ein Spieler erhält, der immer auf „ungerade“ tippt. Der Verlust des Einsatzes wird dabei durch einen negativen Gewinn modelliert. Die Zufallsvariable Y ordnet jedem Elementarereignis den Gewinnbetrag zu, den ein Spieler erhält, der immer eine Geldeinheit auf die Zahl 7 und eine Geldeinheit auf die Zahl 10 setzt. Ein Verlust wird wiederum durch negativen Gewinn berücksichtigt. Bestimmen Sie die Verteilungen von X, Y und $X + Y$. Formulieren Sie die zu $X + Y$ gehörende Spielstrategie mit Worten.

Aufgabe 24 (3 Punkte)

Wir betrachten folgendes Zufallsexperiment: Es werden drei identisch aussehende Münzen geworfen. Jede der Münzen kann entweder auf „Wappen“ oder auf „Zahl“ zum liegen kommen (mit jeweils der gleichen Wahrscheinlichkeit). Die Zufallsvariable X gebe die Anzahl der Münzen an, die auf „Zahl“ zum liegen kommen. Als Grundmenge betrachten wir deshalb die Menge

$$\Omega = \{(z,z,z),(z,z,w),(z,w,z),(z,w,w),(w,z,z),(w,z,w),(w,w,z),(w,w,w)\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable X.

(b) Ist (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und Y eine auf Ω definierte Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}$, so ist die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Zufallsvariable Y definiert als:

$$F(t) = \mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega | Y(\omega) \leq t\}\right)$$

Bestimmen Sie mit dieser Definition die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X aus Aufgabenteil (a) und zeichnen Sie diese.

Aufgabe 25 (3 Punkte)

Um die Veränderung der Pinguinpopulation am Südpol zu analysieren, wurden über Jahre hinweg Pinguine mit Gummiringen markiert und dann fortlaufend die Zahl der markierten Tiere gezählt. Dabei ergab sich, dass die Anzahl der gezählten Pinguine im Laufe der Zeit abnahm, was auf die Erderwärmung zurückgeführt wurde. Als im Rahmen einer prospektiv kontrollierten Studie mit Randomisierung 100 Pinguine mit einem Chip markiert wurden und dann die Hälfte von ihnen auch noch mit einem Gummiring gekennzeichnet wurden, stellte sich heraus: Von den mit Gummiring markierten Tieren überlebten weniger den Winter als von denen ohne Gummiring.

Anhand der folgenden hypothetischen Zahlen, sollen Sie den in der Vorlesung vorgestellten statistischen Test durchführen. Dazu nehmen wir an, es wurden 20 Pinguine mit einem Chip versehen und 10 zusätzlich mit einem Gummiring markiert. Im darauffolgenden Jahr waren noch 3 Tiere mit Gummiring und 9 Tiere ohne Gummiring am Leben. Analog zur Vorlesung sollen Sie zwischen den Hypothesen

H_0 : Gummiring hat keinen Einfluss auf das Überleben der Pinguine.

H_1 : Gummiring vermindert die Überlebensrate der Pinguine.

entscheiden.

Aufgabe 26 (3 Punkte)

Begründen Sie: Sind $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen, so sind auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ konvergent und es gilt:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$

Hinweis: Wenden Sie auf

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} (a_n + b_n) \right)$$

die Rechenregeln für konvergente Folgen an.