



## 10. Übungsblatt zur „Mathematik und Statistik für Biologen“

### Aufgabe 35

(3 Punkte)

Die Dichte der Gleichverteilung auf dem Intervall  $(a, b)$  ist bekanntlich definiert durch:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \text{ falls } x \in (a, b) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} .$$

- Bestimmen Sie die Varianz einer auf dem Intervall  $(a, b)$  gleichverteilten Zufallsvariablen.
- Seien  $X, Y$  unabhängige Zufallsvariablen, die auf dem Intervall  $(a, b)$  gleichverteilt sind. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von  $X + Y$ .

### Aufgabe 36

(3 Punkte)

(a) Für die Zufallsvariable  $X$  gelte:

$$\mathbf{P}\{X = 2\} = 0.3, \mathbf{P}\{X = 4\} = 0.4, \mathbf{P}\{X = 5\} = 0.3.$$

Bestimmen Sie die Varianz der Zufallsvariablen  $X$ .

(b) Die Zufallsvariable  $Y$  sei bernoulliverteilt mit Parameter  $p$ , d.h. es gilt

$$\mathbf{P}\{X = 1\} = p, \mathbf{P}\{X = 0\} = 1 - p.$$

Bestimmen Sie die Varianz von  $X$ .

(c) Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariablen, die jeweils bernoulliverteilt mit Parameter  $p$  sind. Dann ist die Zufallsvariable

$$Z = \sum_{i=1}^n X_i$$

binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p$ . Bestimmen Sie die Varianz von  $Z$ .

### Aufgabe 37

(3 Punkte)

Sei  $X$  eine bernoulliverteilte Zufallsvariable mit Parameter  $p$ , d.h. es gilt

$$P[X = 1] = p, P[X = 0] = 1 - p.$$

Ausgehend von einer Stichprobe  $x_1, \dots, x_n$  wollen wir den Parameter  $p$  schätzen.

Idee beim Maximum-Likelihood-Prinzip ist es, den Parameter  $p$  so zu wählen, dass für unabhängige Bernoulliverteilte Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}_p[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n]$$

maximal ist. Die sogenannte Maximum-Likelihood-Funktion ist definiert als

$$f(p) = \mathbf{P}_p[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n].$$

Indem Sie die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen ausnutzen und dann die Funktion  $f(p)$  maximieren, erhalten Sie einen Schätzer für  $p$ , den sogenannten Maximum-Likelihood-Schätzer.

Sei  $n = 10$  und seien  $x_1 = x_2 = x_6 = x_8 = 1$  und  $x_3 = x_4 = x_5 = x_7 = x_9 = x_{10} = 0$ . Schätzen Sie den Parameter  $p$  mit Hilfe der oben beschriebenen Methode.

**Hinweis:** Es gilt  $\mathbf{P}_p[X_i = x_i] = p^{x_i}(1 - p)^{1-x_i}$ .

### Aufgabe 38

(3 Punkte)

In der Chemie dient die Säure-Base-Titration zur Bestimmung des pH-Werts einer wässrigen Lösung. Lässt man zu einer starken Säure unbekannter Konzentration eine starke Base zufließen, kann der pH Wert in Abhängigkeit von der zugegebenen Menge der Lauge  $x$  in ml näherungsweise durch die Funktion

$$pH(x) = \frac{a}{1 + e^{-x+b}} + c$$

mit  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$  dargestellt werden. Die Parameter  $a, b, c$  hängen dabei von der verwendeten Lauge und Säure, sowie von deren Konzentrationen ab.

Der pH-Wert gibt an, wie sauer bzw. basisch die Flüssigkeit ist. Bei einem pH-Wert von 7 (der sogenannte Neutralpunkt) ist die Flüssigkeit weder sauer noch basisch. Mathematisch erhält man den Neutralpunkt als Wendepunkt der obigen Funktion. Bestimmen Sie den Wendepunkt der Funktion  $pH$ .