Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
01. Februar 2008

14. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G46 (Wiederholung: Potenzreihenansatz)
Sei $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$. Lösen Sie das Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 6x + 12y^2 && \text{für } (x, y) \in G \\ u(x, y) &= 3xy^2 - 2x + 6x^2 - 7x^4 && \text{für } (x, y) \in \partial G \end{aligned}$$

mit dem Potenzreihenansatz.

Lösung: Siehe Lösungsvorschlag der Hausübung vom Blatt 13.

Aufgabe G47 (Wiederholung: Klassifizierung)

(a) Die Differentialgleichung

$$2xy' + x^2y + 6x^3e^x = 0$$

☐ ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung.

☐ ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung.

☐ ist eine lineare Differentialgleichung.

☐ ist eine homogene lineare Differentialgleichung.

☐ ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung.

☐ besitzt unendlich viele Lösungen.

☐ besitzt eine eindeutige Lösung.

(b) Welche der folgenden Funktionensysteme sind linear unabhängig über R?

a) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$
b) $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$, $y_3(x) = \sin x + \cos x$

☐ a,

☐ b,

☐ a und b,

☐ keines von beiden.

Lösung:

(a) Die Differentialgleichung

$$2xy' + x^2y + 6x^3e^x = 0$$

ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung.
ist eine lineare Differentialgleichung.
ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung.
besitzt unendlich viele Lösungen.

(b) a) $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$

Aufgabe G48 (Wiederholung: Klassifizierung)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Differentialoperatoren elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch sind:

(a) $L_1u = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

(b) $L_2u = 1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

(c) $L_3u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

(d) $L_4u = y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Lösung: (a) Elliptisch, denn $2 \cdot 1 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1 > 0$.
(b) Hyperbolisch, denn $1 \cdot (-1) - \left(\frac{-2}{2}\right)^2 = -2 < 0$.
(c) Parabolisch, denn $1 \cdot 4 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 0$.
(d) Hier ist $y^2 \cdot 2 - 0 = 2y^2$. Also ist der Differentialoperator elliptisch für $y \neq 0$ und parabolisch für $y = 0$.

Aufgabe G49 (Wiederholung: Exakte DGLn)

(a) Sind die folgenden Differenzialgleichungen exakt?

$\left(\frac{y^2}{2t} - \cos t\right) dt + \left(y \ln t + \frac{y^3}{2}\right) dy = 0$	☐ ja	☐ nein
$y^2 dt - 2yt dy = 0$	☐ ja	☐ nein
$t^2 \sin y dt + \frac{t^3 \cos y - y^2}{3} dy = 0$	☐ ja	☐ nein

(b) Wozu benötigt man einen integrierenden Faktor?
- (i) ☐ um die homogene Lösung zu finden.
- (ii) ☐ um eine nicht exakte DGL exakt zu machen.
- (iii) ☐ um die Lipschitzkonstante zu berechnen.
- (iv) ☐ um die Variablen trennen zu können.

Lösung:

(a)

$\left(\frac{y^2}{2t} - \cos t\right) dt + \left(y \ln t + \frac{y^3}{2}\right) dy = 0$	☒ ja	☐ nein
$y^2 dt - 2yt dy = 0$	☐ ja	☒ nein
$t^2 \sin y dt + \frac{t^3 \cos y - y^2}{3} dy = 0$	☒ ja	☐ nein

Begründung:

(i) $f(t,y) = \frac{y^2}{2t} - \cos t \Rightarrow f_y(t,y) = \frac{y}{t}$ und $g(t,y) = y \ln t + \frac{y^3}{2} \Rightarrow g_t(t,y) = \frac{y}{t}$. Damit ist $f_y(t,y) = g_t(t,y)$ und die DGL ist exakt.

(ii) $f(t,y) = y^2 \Rightarrow f_y(t,y) = 2y$ und $g(t,y) = -2yt \Rightarrow g_t(t,y) = -2y$. Die DGL ist also nicht exakt.

(iii) $f(t,y) = t^2 \sin y \Rightarrow f_y(t,y) = t^2 \cos y$ und $g(t,y) = \frac{t^3 \cos y - y^2}{3} \Rightarrow g_t(t,y) = t^2 \cos y$, also ist diese DGL exakt.

(b) ii) ☒ um eine nicht exakte DGL exakt zu machen.

Aufgabe G50 (Wiederholung: Anfangswertprobleme)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = x\,(1 + y^2), \quad y(0) = 0$$

durch Trennen der Veränderlichen.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \cos(x + y)$$

durch die Substitution $z(x) = x + y(x)$ und anschließender Trennung der Veränderlichen.

Lösung:

(a) Aus

$$\int_0^y \frac{1}{1+\eta^2}\, d\eta = \int_0^x \xi \, d\xi$$

erhält man $\arctan(y(x)) = \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$. Da $y(0) = 0$, folgt $c = 0$ und somit

$$y(x) = \tan\left(x^2/2\right).$$

(b) Mit $z(x) = x + y(x)$ und $y' = z' - 1$ ergibt sich die DGL

$$z' = 1 + \cos(z).$$

Fall 1: $z' \equiv 0$. Es folgt $z(x) = (2n+1) \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$, also $y(x) = (2n+1) \cdot \pi - x$.
Fall 2: $z' \not\equiv 0$. Trennung der Variablen ergibt

$$\int \frac{1}{1 + \cos(\eta)}\, d\eta = \int 1 \, d\xi.$$

Da $\tan(\eta/2)' = \frac{1}{1+\cos(\eta)}$, folgt somit $\tan(z(x)/2) = x + c$, $c \in \mathbb{R}$, also

$$y(x) = 2\arctan(x + c) - x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe G51 (Wiederholung: Laplacetransformation)

Lösen Sie das folgende Problem mit Hilfe der Laplacetransformation:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Lösung: Die Lösung des Problems ist: $\sin(x) + \cos(x)$.

Aufgabe G52 (Wiederholung: Fundamentalsystem, Systeme von linearen DGLn)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

b) Bestimmen sie diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Lösung:

a) Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom. Es gilt:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)((2-\lambda)^2-1) - ((2-\lambda)-1) + 1 - (2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)^3 - \lambda - 2 + \lambda - 1 - 1 + \lambda \\ &= 8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda - 4 \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 \end{aligned}$$

Die potenziellen ganzzahligen Nullstellen sind: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Probe ergibt, dass 1 eine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. Polynomdivision ergibt:

$$(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4) : (\lambda - 1) = -(\lambda^2 - 5\lambda + 4),$$

also

$$(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4).$$

Wir bestimmen nun die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$. Es ist das LGS

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Dieses LGS hat offensichtlich die linear unabhängigen Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog werden die Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$ bestimmt. Wir wenden Gauß an.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten zum Eigenwert 4 den EV $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist

$$\vec{y}(x) = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

die Lösungsgesamtheit des allgemeinen Systems.

b) Für das AWP müssen nun α, β, γ bestimmt werden. Auch dies wird mit Gauß getan. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\vec{y}(x) = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}$$

die Lösung des AWP.