Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
25.01.2008

13. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G43 (Formel von d'Alambert)

Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems nach der Formel von d'Alambert:

$$\begin{array}{lll} u_{tt} = 4u_{xx} & & x \in (0, 2\pi), t > 0 \\ u(x,0) = \sin(x), & u_t(x,0) = \sin(x)\cos(x) & x \in (0, 2\pi). \end{array}$$

Lösung: Mit den Bezeichnungen der Formel von d'Alambert ergibt sich:

$$f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \sin(x)\cos(x), \quad c = 2.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x+2t) + \sin(x-2t)) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \sin(\xi)\cos(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x+2t) + \sin(x-2t)) + \frac{1}{8}(\sin^2(x+2t) - \sin^2(x-2t)). \end{aligned}$$

Aufgabe G44 (Dirichletproblem, Potenzreihenansatz)

Sei $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$. Lösen Sie das Dirichletproblem

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{für } (x,y) \in G \\ u(x,y) = x^2 - xy & \text{für } (x,y) \in \partial G \end{array}$$

mit dem Potenzreihenansatz.

Lösung:

Da $u(x,y)$ auf ∂G unendlich oft differenzierbar ist, können wir u in eine Potenzreihe entwickeln:

$$u(x,y) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \mathrm{Re}((x+iy)^k) + b_k \mathrm{Im}((x+iy)^k) \right).$$

Da auf dem Rand keine Terme der Ordnung 3 oder höher vorkommen, ergibt sich der Ansatz

$$u(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2(x^2 - y^2) + b_1 y + b_2 xy.$$

Auf dem Rand gilt $x^2 + y^2 = 1$, also auch $y^2 = 1 - x^2$. Somit erhalten wir

$$u(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2(2x^2 - 1) + b_1 y + b_2 xy.$$

Koeffizientenvergleich mit dem Randwert ergibt nun

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = -1$$

und die Lösung ist

$$u(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - xy = \frac{1}{2} - xy + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

Aufgabe G45 (Produktansatz für das Dirichlet-Problem)
Lösen Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0 && \text{für } x \in (0,1),\ y \in (0,1),\\
u(0,y) = 0,\ u(1,y) &= \sin(2\pi y) && \text{für } y \in (0,1),\\
u(x,0) = 0,\ u(x,1) &= 0 && \text{für } x \in (0,1),
\end{aligned}$$

mit Hilfe eines Produktansatzes.

Lösung:
Mit dem Ansatz $u(x,y) = v(x) \cdot w(y)$ erhält man $u_{xx}(x,y) = v''(x) \cdot w(y)$, $u_{yy}(x,y) = v(x) \cdot w''(y)$ Setzt man dies in die DGL ein, so ergibt sich

$$v''(x) \cdot w(y) + v(x) \cdot w''(y) = 0.$$

Separation der Variablen führt zu

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = K,$$

mit einer Konstante $K \in \mathbb{R}$. (Da die linke Seite nur von x, die rechte Seite nur von y abhängt, müssen beide Ausdrücke konstant sein, um übereinzustimmen.) Also sind jetzt die DGL

$$\begin{aligned}
v''(x) &= K \cdot v(x),\\
w''(y) &= -K \cdot w(y),
\end{aligned}$$

mit $v(0) = w(0) = w(1) = 0$ zu lösen. Wir wenden uns zuerst der 2. DGL zu:

Fall 1: $K = 0$. Dann ist $w(y) = c_1 y + c_2$, mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Mit den Randbedingungen würde $w(y) = 0$ folgen, was wegen $v(1) \cdot w(y) = \sin(2\pi y)$ keine Lösung sein kann.

Fall 2: $K < 0$. Dann ist $w(y) = c_1 \exp(-\sqrt{|K|}y) + c_2 \exp(\sqrt{|K|}y), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ in Widerspruch zu den Randbedingungen.

Fall 3: $K > 0$. Dann ist

$$w(y) = c_1 \sin(\sqrt{K}y) + c_2 \cos(\sqrt{K}y), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus $w(0) = w(1) = 0$ folgt $c_2 = 0$ und $K = \pi^2 n^2$, $n = 1, 2, \ldots$.

Somit erhalten wir

$$w(y) = c_1 \sin(n\pi y), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Mit $K = \pi^2 n^2$ ergibt sich jetzt für die erste DGL

$$v(x) = c_1 \exp(n\pi x) + c_2 \exp(-n\pi x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Mit $v(0) = 0$ folgt $c_1 + c_2 = 0$, also $c_2 = -c_1$:

$$v(x) = c_1 \exp(n\pi x) - c_1 \exp(-n\pi x) = 2c_1 \sinh(n\pi x), \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Also lautet die allgemeine Lösung

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \cdot \sinh(n\pi x) \cdot \sin(n\pi y).$$

Mit $u(1, y) = \sin(2\pi y)$ folgt noch

$$\tilde{c}_2 = \frac{1}{\sinh(2\pi)}$$

und $\tilde{c}_n = 0$ sonst.
Also ist die Lösung schließlich

$$u(x, y) = \frac{\sin(2\pi y) \sinh(2\pi x)}{\sinh(2\pi)}.$$

Hausübung

Aufgabe H40 (Formel von d'Alambert)

Bestimmen die die Lösung des folgenden Anfangswertproblemes nach der Formel von d'Alambert:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{9}u_{tt} = u_{xx} & & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}, & u_t(x,0) = \frac{1}{1-x^2} & x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Hinweis: $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Lösung: Mit den Bezeichnungen der Formel von d'Alambert ergibt sich:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad c = 3.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x+3t)^2} + \frac{1}{1+(x-3t)^2}\right) + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} \frac{1}{1-\xi^2}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(x+3t)^2} + \frac{1}{1+(x-3t)^2}\right) + \frac{1}{6}(\operatorname{artanh}(x+3t) - \operatorname{artanh}(x-3t)). \end{aligned}$$

Aufgabe H41 (Dirichletproblem, Potenzreihenansatz)

Sei $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$. Lösen Sie das Dirichletproblem

$$\begin{array}{rll} \Delta u = 6x + 12y^2 & & \text{für } (x,y) \in G \\ u(x,y) = 3xy^2 - 2x + 6x^2 - 7x^4 & & \text{für } (x,y) \in \partial G \end{array}$$

mit dem Potenzreihenansatz.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst (z.B. durch scharfes Hinsehen) eine Partikulärlösung und transformieren Sie das Problem in ein homogenes.

Lösung: Zunächst bestimmen wir eine partikuläre Lösung. Diese ist

$$u_p(x,y) = x^3 + y^4.$$

Setzen wir nun $u(x,y) := u_H(x,y) + u_p(x,y)$, so erhalten wir das transformierte homogene Problem

$$\begin{array}{rll} \Delta u_H = 0 & & \text{für } (x,y) \in G \\ u_H(x,y) = u(x,y) - u_p(x,y) = 3xy^2 - 2x + 6x^2 - 7x^4 - x^3 - y^4 & & \text{für } (x,y) \in \partial G. \end{array}$$

Da u_H auf ∂G unendlich oft differenzierbar ist, können wir u_H dort in eine Potenzreihe entwickeln:

$$u_H(x,y) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \operatorname{Re}((x+iy)^k) + b_k \operatorname{Im}((x+iy)^k)\right).$$

Daraus ergibt sich der Ansatz

$$\begin{aligned} u_H(x,y) &= a_0 + a_1 x + a_2(x^2 - y^2) + a_3(x^3 - 3xy^2) + a_4(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \\ & \quad b_1 y + b_2 xy + b_3(3x^2y - y^3) + b_4(-4xy^3 + 4x^3y), \end{aligned} \tag{1}$$

da die höheren Koeffizienten 0 sind, weil wir nur Terme maximal 4. Ordnung auf dem Rand haben. Nutzen wir nun aus, dass auf dem Rand von G $x^2+y^2=1$ gilt, so erhalten wir die Randbedingung

$$u_H(x,y) = 3x\underbrace{(1-x^2)}_{=y^2} - 2x + 6x^2 - 7x^4 - x^3 - y^4 = x - 4x^3 - y^4 + 6x^2 - 7x^4. \tag{2}$$

Sortieren wir die Potenzreihe (1) nach den Variablen und ersetzen wieder $y^2 = 1 - x^2$, so erhält man

$$\begin{aligned} u_H(x,y) &= (a_0 - a_2) + (a_1 - 3a_3)x + b_1 y + (2a_2 - 6a_4)x^2 + b_2 xy + 4a_3x^3 - b_3y^3 + \\ &\quad 3b_3x^2y + 7a_4x^4 + a_4y^4 - 4b_4xy^3 + 4b_4x^3y. \end{aligned}$$

Der Koeffizentenvergleich mit den Randwerten (2) liefert nun das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0 - a_2 &= 0 \\ a_1 - 3a_3 &= 1 \\ 2a_2 - 6a_4 &= 6 \\ 4a_3 &= -4 \\ 7a_4 &= 7 \\ a_4 &= -1. \end{aligned}$$

Dieses System hat die Lösung

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -1, \quad a_4 = -1.$$

Somit ergibt sich die Lösung des homogenen Problems wie folgt:

$$u_H(x,y) = -2x - x^3 + 3xy^2 - x^4 - y^4 + 6x^2y^2.$$

Einsetzen ergibt dann

$$u(x,y) = u_H(x,y) + u_p(x,y) = -2x + 3xy^2 - x^4 + 6x^2y^2.$$

Aufgabe H42 (Produktansatz für das Dirichlet-Problem)

Lösen Sie das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{für } x \in (0,1),\ y \in (0,1), \\ u(0,y) = \sin(2\pi y),\ u(1,y) &= \sinh(\pi)\sin(\pi y) + \cosh(2\pi)\sin(2\pi y) && \text{für } y \in (0,1), \\ u(x,0) = 0,\ u(x,1) &= 0 && \text{für } x \in (0,1), \end{aligned}$$

mit Hilfe eines Produktansatzes.

Lösung: Wir gehen nach dem Bernoullischen Produktansatz vor und setzen

$$u(x,y) := v(x)w(y)$$

Ableiten und einsetzen in die DGL liefert dann

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)}.$$

Da die linke Seite nur von x und die rechte Seite nur von y abhängt, folgt daraus, dass beide Ausdrücke konstant sind. Dies liefert uns die beiden DGLs

$$\begin{aligned} v''(x) &= Cv(x) \\ w''(y) &= -Cw(y) \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Wir betrachten zunächst die untere DGL und unterscheiden drei Fälle:

$C = 0$ Dann lautet die DGL
$$w''(y) = 0$$
und hat die Lösung $w(y) = \alpha y + \beta$. Aus den Randbedingungen erhalten wir $w(0) = w(1) = 0$. Einsetzen liefert
$$w(0) = \beta = 0 \quad \text{und} \quad w(1) = \alpha = 0.$$
Damit ist $w(y) \equiv 0$ im Widerspruch zu den anderen Randbedingungen.

$C < 0$ Hier ist die allgemeine Lösung der DGL
$$w(y) = \alpha \exp(\sqrt{|C|}y) + \beta \exp(-\sqrt{|C|}y).$$
Die Randbedingungen liefern
$$w(0) = \alpha + \beta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = -\alpha$$
und
$$w(1) = \alpha \exp(\sqrt{|C|}) - \alpha \exp(-\sqrt{|C|}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0.$$
Also auch hier $w(y) \equiv 0$ im Widerspruch zu den weiteren Randbedingungen.

$C > 0$ Hier ist die allgemeine Lösung der DGL
$$w(y) = \alpha \sin(\sqrt{C}y) + \beta \cos(\sqrt{C}y).$$
Aus den Randvorgaben $u(x, 0) = u(x, 1) = 0$ erhalten wir $w(0) = w(1) = 0$, d.h.
$$w(0) = \alpha \sin(0) + \beta \cos(0) = \beta = 0$$
und damit
$$w(1) = \alpha \sin(\sqrt{C}) + \underbrace{\beta}_{=0} \cos(\sqrt{C}) = \alpha \sin(\sqrt{C}) \overset{!}{=} 0.$$
Somit ist $C = k^2\pi^2$ mit $k \in \mathbb{N}$.

Für $C > 0$ hat die allgemeine Lösung der DGL
$$v''(x) = Cv(x)$$
die Form
$$v(x) = \tilde{\alpha} \exp(\sqrt{C}x) + \tilde{\beta} \exp(-\sqrt{C}x).$$
Mit $C = k^2\pi^2$ ergibt sich
$$v(x) = \tilde{\alpha} \exp(k\pi x) + \tilde{\beta} \exp(-k\pi x).$$
Setzen wir $\tilde{\alpha} := \frac{1}{2}(\gamma + \delta)$ und $\tilde{\beta} := \frac{1}{2}(\delta - \gamma)$, so erhalten wir
$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{2}(\gamma + \delta) \exp(k\pi x) + \frac{1}{2}(\delta - \gamma) \exp(-k\pi x) \\ &= \frac{\gamma}{2}(\exp(k\pi x) - \exp(-k\pi x)) + \frac{\delta}{2}(\exp(k\pi x) + \exp(-k\pi x)) \\ &= \gamma \sinh(k\pi x) + \delta \cosh(k\pi x) \end{aligned}$$
und die allgemeine Lösung lautet
$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k \sinh(k\pi x) + \delta_k \cosh(k\pi x)) \sin(k\pi y).$$

Betrachten wir nun die weiteren Randbedingungen, so erhalten wir

$$u(0, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sin(k\pi y) \stackrel{!}{=} \sin(2\pi y),$$

also $\delta_2 = 1$ und sonst verschwinden die δ_k. Damit ergibt sich für den letzten Randwert

$$\begin{aligned} u(1, y) &= \gamma_1 \sinh(\pi) \sin(\pi y) + (\gamma_2 \sinh(2\pi) + \cosh(2\pi)) \sin(2\pi y) + \sum_{k=3}^{\infty} \gamma_k \sinh(k\pi) \sin(k\pi y) \\ &\stackrel{!}{=} \sinh(\pi) \sin(\pi y) + \cosh(2\pi) \sin(2\pi y). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir noch $\gamma_1 = 1$ und die übrigen γ_k verschwinden. Damit ist die Lösung

$$u(x, y) = \sinh(\pi x) \sin(\pi y) + \cosh(2\pi x) \sin(2\pi y).$$