Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
18. Januar 2008

12. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G39 (Klassifikation)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Differenzialoperatoren elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch sind:

a) $L_1 u = u_{xx} + u_{xy} + u_{yy}$

b) $L_2 u = 4u_{xx} - 8u_{xy} - 2u_{yy}$

c) $L_3 u = u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy}$

d) $L_4 u = y u_{xx} + 2u_{yy}$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= \frac{1}{2} \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Es ist $ac - b^2 = \frac{3}{4} > 0$, also ist der Differenzialoperator *elliptisch*.

b)

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= -4 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

Es ist $ac - b^2 = -24 < 0$, also ist der Differenzialoperator *hyperbolisch*.

c)

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 2 \\ c &= 4 \end{aligned}$$

Es ist $ac - b^2 = 0$, also ist der Differenzialoperator *parabolisch*.

d)

$$\begin{aligned} a &= y \\ b &= 0 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

Es ist $ac - b^2 = 2y$. Demnach ist der Differenzialoperator *elliptisch* für $y > 0$, *hyperbolisch* für $y < 0$ und *parabolisch* für $y = 0$.

Aufgabe G40 (Klassifikation)

Gegeben seien die Differenzialgleichungen

a) $u_x + 3u_x u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy}x^2 u = 2u_x + 3$

b) $u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0$

c) $(x-y)^2 u_{yy} - 3u_{xy} + x^4 u_x = 0$

Entscheiden Sie, ob die Differenzialgleichungen linear, semilinear oder quasilinear sind.

Lösung:

Jeweils mit den Bezeichnungen von Folie 233 gilt:

a)

$$\begin{aligned} a &= 3u_x \\ b &= -1 \\ c &= x^2 u \\ F &= -u_x - 3 \end{aligned}$$

Da a von u_x und c von u abhängen, ist die DGL *quasilinear*.

b)

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= \frac{1}{2} \\ c &= -2 \\ F &= 0 \end{aligned}$$

Da a, b und c konstant sind, ist die DGL *linear*.

c)

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= -\frac{3}{2} \\ c &= (x-y)^2 \\ F &= x^4 u_x \end{aligned}$$

Es sind a und b konstant und c hängt von x und y ab, aber nicht von u oder dessen ersten, partiellen Ableitungen. Damit ist die DGL *linear*.

Aufgabe G41 (Standardform)

Transformieren Sie die Differenzialgleichung

$$4u_{xx} - 8u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x = 0$$

auf Standardform, indem Sie das Lösungsschema auf Folie 236ff verwenden.

Lösung: Wie in Aufgabe G39 ist $a = 4, b = -4$ und $c = -2$. Weiterhin ist $F = 3u_x$. Wir bestimmen die Koeffizienten der Transformationsmatrix. Wir setzen $\alpha = \gamma = 1$ und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \delta - \beta &= 1 \\ B = 4 - 4(\beta + \delta) - 2\delta\beta &= 0. \end{aligned}$$

Mit $\delta = 1 + \beta$ ergibt sich in der unteren Gleichung

$$\beta^2 + 5\beta = 0,$$

also $\beta = 0$ und $\delta = 1$. Damit erhalten wir

$$A = 4 \qquad B = 0 \qquad C = -6.$$

Nun müssen wir noch u_x transformieren. Mit der Transformation

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

erhalten wir durch Ableiten (wie auf der Folie 238)

$$(\nabla_{(\xi,\eta)} v)(\xi, \eta) = T^T (\nabla_{(x,y)} u)(x, y).$$

Einsetzen und nach u_x auflösen ergibt $u_x = v_\xi + v_\eta$. Damit erhalten wir die transformierte DGL

$$4v_{\xi\xi} - 6v_{\eta\eta} + 3v_\xi + 3v_\eta = 0.$$

Aufgabe G42 (Lineare partielle DGL)

Lösen Sie die partielle Differenzialgleichung

$$v_t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_x \,, \quad v(x, 0) = \begin{pmatrix} x \\ \cos(x) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

mittels Transformation der Matrix in Diagonalgestalt.

Lösung: Wir gehen wie auf Folie 225ff vor. Dazu berechnen wir zuerst die Eigenwerte λ und anschließend die Eigenvektoren u der Matrix. Wir erhalten

$$\lambda_1 = 2, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Transformation

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Diese Matrixmultiplikation ist eigentlich nicht notwendig, denn man weiß, dass die entstehende Diagonalmatrix die Eigenwerte auf der Diagonalen haben muss, somit kann man sie auch gleich aufschreiben.)

Wir substituieren

$$w := T^{-1} v$$

und erhalten somit die Gleichung

$$w_t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w_x.$$

Diese zerfällt in zwei Transportgleichungen:

$$\begin{aligned} w_{1,t} = 2w_{1,x} \quad &\Leftrightarrow \quad w_{1,t} - 2w_{1,x} = 0 \\ w_{2,t} = w_{2,x} \quad &\Leftrightarrow \quad w_{2,t} - w_{2,x} = 0. \end{aligned}$$

Nach Beispiel 1 auf Folie 218 erhalten wir somit die Lösungen

$$\begin{aligned} w_1(x,t) &= h_1(-2t-x) \qquad \text{und} \\ w_2(x,t) &= h_2(-t-x) \end{aligned} \tag{1}$$

für beliebige differenzierbare Funktionen $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Um die genauen Funktionen h_i zu bestimmen, müssen wir zunächst die Anfangsbedingung transformieren. Es gilt

$$w(x,0) = T^{-1}v(x,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \cos x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in (1) mit $t = 0$ ergibt somit

$$\begin{aligned} w_1(x,0) = h_1(-2\cdot 0 - x) = h_1(-x) &\overset{!}{=} x - \cos x \quad \Rightarrow \quad h_1(x) = (-x) - \cos(-x) = -x - \cos x \\ w_2(x,0) = h_2(-1\cdot 0 - x) = h_2(-x) &\overset{!}{=} \cos x \quad \Rightarrow \quad h_2(x) = \cos(-x) = \cos x. \end{aligned}$$

$w_1(x,t)$ und $w_2(x,t)$ ergeben sich damit aus (1) mit

$$\begin{aligned} w_1(x,t) &= h_1(-2t-x) = -(-2t-x) - \cos(-2t-x) = 2t + x - \cos(2t+x), \\ w_2(x,t) &= h_2(-t-x) = \cos(-t-x) = \cos(t+x). \end{aligned}$$

Damit haben wir die Lösung des transformierten Problems:

$$w(x,t) = \begin{pmatrix} 2t + x - \cos(2t+x) \\ \cos(t+x) \end{pmatrix}$$

Rücksubstitution $v = Tw$ liefert dann die Lösung

$$\begin{aligned} v(x,t) &= Tw(x,t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t + x - \cos(2t+x) \\ \cos(t+x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2t + x - \cos(2t+x) + \cos(t+x) \\ \cos(t+x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H37 (Klassifikation)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Differenzialoperatoren elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch sind:

a) $L_1 u = 3u_{xx} - 2u_{yy} + 5u_{xy}$

b) $L_2 u = -2u_{xx} + 3u_{yy}$

c) $L_3 u = 8u_{xx} + 8u_{xy} + 2u_{yy}$

d) $L_4 u = xu_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy}$

Lösung:

a) Es ist $a = 3, b = \frac{5}{2}$ und $c = -2$. Damit ergibt sich $ac - b^2 = -\frac{49}{4} < 0$, also ist der Differenzialoperator *hyperbolisch*.

b) Es ist $a = -2, b = 0$ und $c = 3$. Damit ergibt sich $ac - b^2 = -6 < 0$, also ist der Differenzialoperator *hyperbolisch*.

c) Es ist $a = 8, b = 4$ und $c = 2$. Damit ergibt sich $ac - b^2 = 0$, also ist der Differenzialoperator *parabolisch*.

d) Es ist $a = x, b = -2$ und $c = 4$. Damit ergibt sich $ac - b^2 = 4x - 4$, also ist der Differenzialoperator für $x > 1$ *elliptisch*, für $x < 1$ *hyperbolisch* und für $x = 1$ *parabolisch*.

Aufgabe H38 (Standardform)

Transformieren Sie die Differenzialgleichung

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0$$

auf Standardform.

Lösung: Seien

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= \frac{1}{2} \\ c &= -2. \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die Transformationsmatrix

$$T := \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für die Koeffizienten muss

$$\begin{aligned} \alpha\delta - \gamma\beta &= 1 \qquad \text{und} \\ B = \alpha\gamma + \frac{1}{2}(\beta\gamma + \alpha\delta) - 2\delta\beta &= 0 \end{aligned}$$

gelten. Setzen wir $\alpha = \gamma = 1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta - \beta &= 1 \qquad \text{und} \\ B = 1 + \frac{1}{2}(\beta + \delta) - 2\delta\beta &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung

$$\beta = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Damit ergibt sich die Transformationsmatrix

$$T := \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und wir erhalten mit der Transformation

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

die in Standardform transformierte DGL

$$\left(-1 + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) v_{\xi\xi} - \left(1 + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) v_{\eta\eta} = 0.$$

Aufgabe H39 (Inhomogene Transportgleichung)
Lösen Sie die inhomogene Transportgleichung

$$w_t - w_x = (x+t)^2, \quad w(x,0) = e^x.$$

Überprüfen Sie Ihre Lösung anschließend.

Lösung: Wir gehen wir auf den Folien 226f vor. In dieser Aufgabe ist $\lambda = 1$, $\tilde{g}(x,t) = (x+t)^2$ und $w(x,0) = \cos(x)$. Damit erhalten wir die Charakteristiken $t + x = c$ mit c konstant und setzen $t = c - x$. Wir definieren

$$\varphi(\tau) := w(\tau, c - \tau).$$

Die Formel auf Folie 227 liefert mit $c = t + x$

$$\begin{aligned} w(x,t) = \varphi(x) = w_0(c) &- \int_c^x \tilde{g}(\tau, c-\tau) d\tau \\ &= e^{x+t} - \int_c^x (\tau + c - \tau)^2 d\tau \\ &= e^{x+t} - \int_c^x c^2 d\tau \\ &= e^{x+t} - [c^2\tau]_c^x \\ &= e^{x+t} - c^2(x-c) \\ &= e^{x+t} + t(x+t)^2. \end{aligned}$$

Wir überprüfen die Lösung:

$$\begin{aligned} w_x &= e^{x+t} + 2t(x+t) \\ w_t &= e^{x+t} + (x+t)^2 + 2t(x+t). \end{aligned}$$

Und somit

$$w_t - w_x = (x+t)^2.$$

Außerdem gilt

$$w(x,0) = e^{x+0} + 0 \cdot (x+0)^2 = e^x.$$

Also ist auch die Anfangswertbedingung erfüllt.