Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
11.01 2008

11. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G36 (Lineare partielle DGL)
Lösen Sie die partielle Differenzialgleichung

$$v_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v_x \,, \quad v(x,0) = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

mittels Transformation der Matrix in Diagonalgestalt.

Lösung: Wir gehen wie auf Folie 225ff vor. Dazu berechnen wir zuerst die Eigenwerte λ und anschließend die Eigenvektoren u der Matrix. Wir erhalten

$$\lambda_1 = 3, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir mit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

die Transformation

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir substituieren

$$w := T^{-1} v$$

und erhalten somit die Gleichung

$$w_t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} w_x.$$

Diese zerfällt in zwei Transportgleichungen:

$$\begin{aligned} w_{1,t} = 3w_{1,x} \quad &\Leftrightarrow \quad w_{1,t} - 3w_{1,x} = 0 \\ w_{2,t} = -w_{2,x} \quad &\Leftrightarrow \quad w_{2,t} + w_{2,x} = 0. \end{aligned}$$

Nach Beispiel 1 auf Folie 218 erhalten wir somit die Lösungen

$$\begin{aligned} w_1(x,t) &= h_1(-3t - x) \qquad \text{und} \\ w_2(x,t) &= h_2(t - x) \end{aligned} \tag{1}$$

für beliebige differenzierbare Funktionen $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Um die genauen Funktionen h_i zu bestimmen, transformieren wir zunächst die Anfangsbedingung. Es gilt

$$w(x,0) = T^{-1}v(x,0) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+x^2) \\ \frac{1}{2}(x-x^2) \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in (1) ergibt somit

$$\begin{aligned} w_1(x,0) &= h_1(-x) = \frac{1}{2}(x+x^2) \quad \Leftrightarrow \quad h_1(x) = \frac{1}{2}(-x+x^2) \\ w_2(x,0) &= h_2(-x) = \frac{1}{2}(x-x^2) \quad \Leftrightarrow \quad h_2(x) = \frac{1}{2}(-x-x^2). \end{aligned}$$

Damit haben wir die Lösung des transformierten Problems:

$$w(x,t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3t+x+(3t+x)^2) \\ \frac{1}{2}(-t+x-(t-x)^2) \end{pmatrix}$$

Rücksubstitution liefert dann die Lösung

$$v(x,t) = Tw(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3t+x+(3t+x)^2) \\ \frac{1}{2}(-t+x-(t-x)^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+x+4tx+4t^2 \\ 2t+2tx+5t^2+x^2 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Alternativ zur Bestimmung von w über die Funktionen h_i, ist auch eine direkte Bestimmung der Funktionen w_i mit der Formel auf Folie 219 möglich. Damit erhält man bspw. für w_1

$$w_1(x,t) = w_{1,0}(-c),$$

wobei $c = at - x = -3t - x$ und $w_{1,0}(x) = \frac{1}{2}(x+x^2)$ siehe oben.
Also

$$w_1(x,t) = \frac{1}{2}(3t+x+(3t+x)^2).$$

Aufgabe G37 (Inhomogene Transportgleichung)
Lösen Sie die inhomogene Transportgleichung

$$w_t + w_x = e^{x+t}, \quad w(x,0) = \cos(x).$$

Überprüfen Sie Ihre Lösung anschließend.

Lösung: Wir gehen wir auf den Folien 226f vor. In dieser Aufgabe ist $\lambda = -1$, $\tilde{g}(x,t) = e^{x+t}$ und $w(x,0) = \cos(x)$. Damit erhalten wir die Charakteristiken $-t + x = c$ mit c konstant und setzen $t = x - c$. Wir definieren

$$\varphi(\tau) := w(\tau, \tau - c).$$

Die Formel auf Folie 227 liefert mit $c = -t + x$

$$\begin{aligned} w(x,t) = \varphi(x) &= w_0(c) + \int_c^x \tilde{g}(\tau, \tau - c)d\tau \\ &= \cos(x-t) + \int_c^x e^{\tau+\tau-c}d\tau \\ &= \cos(x-t) + e^{-c}\int_c^x e^{2\tau}d\tau \\ &= \cos(x-t) + e^{-c}[\frac{1}{2}e^{2\tau}]_c^x \\ &= \cos(x-t) + e^{t-x}\frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2t+2x}) \\ &= \cos(x-t) + \frac{1}{2}(e^{x+t} - e^{x-t}). \end{aligned}$$

Wir überprüfen die Lösung:

$$\begin{aligned} w_x &= -\sin(x-t) + \frac{1}{2}(e^{x+t} - e^{x-t}), \\ w_t &= \quad \sin(x-t) + \frac{1}{2}(e^{x+t} + e^{x-t}). \end{aligned}$$

Und somit

$$w_x + w_t = e^{x+t}.$$

Außerdem gilt

$$w(x,0) = \cos(x) + \frac{1}{2}(e^x - e^x) = \cos(x).$$

Also ist auch die Anfangswertbedingung erfüllt.

Aufgabe G38 (Eigenwertproblem)

Gegeben sei das vollhomogene Randwertproblem

$$y''(x) + 2y'(x) - \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0, \tag{1}$$

wobei λ ein Parameter ist.

Man nennt Probleme dieser Art auch *Eigenwertprobleme*. Eigenwertprobleme besitzen immer die triviale Lösung $y \equiv 0$. Es hängt von λ ab, ob es darüber hinaus noch weitere Lösungen gibt. Diejenigen λ, für die das Randwertproblem nichttriviale Lösungen besitzt, heißen *Eigenwerte* des Randwertproblems. Die zugehörigen Lösungen heißen *Eigenfunktionen* zum Eigenwert λ.

Um die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (1) zu bestimmen, führen Sie folgende Schritte durch:

(i) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von λ Lösungsfundamentalsysteme für (1).
(*Hinweis:* Beschränken Sie sich dabei auf die Eigenwerte $\lambda < -1$.)

(ii) Stellen Sie die Matrix R und den Vektor γ (vgl. Folie 207) auf und ermitteln anhand der Bedingung $\det R = 0$ diejenigen λ, für die das Randwertproblem Lösungen hat.

Lösung:

(i) Das charakteristische Polynom von (1) lautet

$$p(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha - \lambda.$$

Es besitzt die Nullstellen

$$\alpha_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+\lambda}$$

Der Vollständigkeit halber behandeln wir hier auch die Fälle $\lambda = -1$ und $\lambda > -1$ in den Fällen 1 und 2. Gefordert ist nur Fall 3!

- Fall 1: $\lambda > -1$
  Das charakteristische Polynom hat zwei einfache, reelle Nullstellen $\alpha_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+\lambda}$. Also ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

  $$y_1(x) = e^{\alpha_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\alpha_2 x}.$$

  Wir benötigen noch ihre Ableitungen:

  $$y_1'(x) = \alpha_1 e^{\alpha_1 x}, \quad y_2'(x) = \alpha_2 e^{\alpha_2 x}.$$

- Fall 2: $\lambda = -1$
  Das charakteristische Polynom hat die doppelte Nullstelle $\alpha = -1$.
  Also ist
  $$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = xe^{-x}$$
  ein Fundamentalsystem mit den Ableitungen
  $$y_1'(x) = -e^{-x}, \quad y_2'(x) = (1-x)e^{-x}.$$
- Fall 3: $\lambda < -1$
  Das charakteristische Polynom hat zwei einfache, komplex konjugierte Nullstellen $\alpha_{1/2} = -1 \pm i\beta$ mit $\beta = \sqrt{-\lambda - 1}$.
  Also ist
  $$y_1(x) = e^{-x}\sin(\beta x), \quad y_2(x) = e^{-x}\cos(\beta x)$$
  ein Fundamentalsystem mit den Ableitungen
  $$\begin{aligned} y_1'(x) &= e^{-x} \cdot (\beta\cos(\beta x) - \sin(\beta x)), \\ y_2'(x) &= -e^{-x} \cdot (\beta\sin(\beta x) + \cos(\beta x)) \end{aligned}$$

(ii) Der Vektor γ lautet
$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix R unterscheiden wir wieder die drei Fälle:

- Fall 1: $\lambda > -1$
  Die Matrix R lautet
  $$R = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(\pi) + y_1'(\pi) & y_2(\pi) + y_2'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (1+\alpha_1)e^{\alpha_1\pi} & (1+\alpha_2)e^{\alpha_2\pi} \end{pmatrix}$$
  Es gilt $\det R \neq 0$. Somit hat das Gleichungssystem $Rc = \gamma$ nur die Lösung $c = 0$. Da die triviale Funktion $y \equiv 0$ jedoch keine Eigenfunktion ist, hat das Randwertproblem im Fall $\lambda > -1$ keine Lösung.
- Fall 2: $\lambda = -1$
  Die Matrix R lautet
  $$R = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(\pi) + y_1'(\pi) & y_2(\pi) + y_2'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\pi} \end{pmatrix}$$
  Es gilt $\det R = e^{-\pi} \neq 0$. Also hat analog zu Fall 1 das Randwertproblem für $\lambda = -1$ keine Lösung.
- Fall 3: $\lambda < -1$
  Die Matrix R lautet
  $$R = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(\pi) + y_1'(\pi) & y_2(\pi) + y_2'(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta e^{-\pi}\cos(\beta\pi) & -\beta e^{-\pi}\sin(\beta\pi) \end{pmatrix}$$

Es gilt $\det R = -\beta e^{-\pi} \cos(\beta\pi)$, und

$$\begin{aligned}
\det R = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\beta e^{-\pi} \cos(\beta\pi) = 0 \\
&\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \quad \cos(\beta\pi) = 0 \\
&\overset{\beta>0}{\Leftrightarrow} \quad \beta \in \left\{ z + \frac{1}{2} \mid z \in \mathbb{N}_0 \right\} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda \in \left\{ -(z + \frac{1}{2})^2 - 1 \mid z \in \mathbb{N}_0 \right\}
\end{aligned}$$

Für diese λ hat das Gleichungssystem $Rc = \gamma$ die Lösungsmenge

$$c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_2 = 0.$$

Hausübung

Aufgabe H34 (Eigenwerte von Randwertproblemen)
Bestimmen Sie die Eigenwerte des Problemes

$$y'' - 2y' + (1-\lambda)y = 0 \qquad y(0) = y(\pi) = 0\ .$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

Lösung: Wir bilden das charakteristische Polynom: $\mu^2 - 2\mu + (1-\lambda)$. Falls $\lambda > 0$, hat dies die Nullstellen $1 \pm \sqrt{\lambda}$, die allgemeine Lösung hat also dann die Form

$$y(x) = c_1 e^{(1+\sqrt{\lambda})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{\lambda})x}\ .$$

Aus $y(0) = 0$ folgt $c_2 = -c_1$, und aus $y(\pi) = 0$ dann $c_1 = 0$, also existiert nur die triviale Lösung, und $\lambda > 0$ ist also kein Eigenwert des Problems. Für $\lambda = 0$ hat das Poynom eine doppelte Nullstelle in 1, also ist hier die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x\ .$$

Hier sorgt die Bedingung $y(0) = 0$ für $c_1 = 0$, und die Bedingung $y(\pi) = 0$ für $c_2 = 0$; auch $\lambda = 0$ ist also kein Eigenwert. Ist nun $\lambda < 0$, $\lambda = -\rho$, so sind $1 \pm i \cdot \sqrt{\rho}$ die Nullstellen des Polynoms, und die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = c_1 e^x \sin(\sqrt{\rho}x) + c_2 e^x \cos(\sqrt{\rho}x)\ .$$

Die Bedingung $y(0) = 0$ erzwingt $c_2 = 0$, und aus der Bedingung $y(\pi) = 0$ erhalten wir $c_1 e^\pi \sin(\sqrt{\rho}\pi) = 0$. Dies hat genau dann eine Lösung mit $c_1 \neq 0$, wenn $\sin(\sqrt{\rho}\pi) = 0$, also $\sqrt{\rho} \in \{1, 2, 3, \ldots\}$. Also sind ($\rho = -\lambda$) die Zahlen $\lambda = -1, -4, -9, -16, \ldots$ Eigenwerte des Problemes.

Aufgabe H35 (Variablensubstitution)
Bestimmen Sie die Lösung der linearen partiellen DGL

$$u_x + u_y = e^{x+y}\ , \qquad u(x, 0) = \cos(x)\ , \qquad\qquad x, y \in \mathbb{R}\ ,$$

mit Hilfe der Variablensubstitution $\xi = x + y, \eta = x - y$.

Lösung: Wir setzen wie mit der Variablensubstitution $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ an, schreiben $w(\xi, \eta) := u(x, y) = u((\xi + \eta)/2, (\xi - \eta)/2)$ und haben damit

$$w_\xi(\xi, \eta) = \frac{1}{2}u_x(x, y) + \frac{1}{2}u_y(x, y) = \frac{1}{2}e^{x+y} = \frac{1}{2}e^\xi\ .$$

Dies hat die allgemeine Lösung

$$w(\xi, \eta) = \frac{1}{2}e^\xi + c(\eta)\ ,$$

nach u und x, y umgeschrieben also

$$u(x, y) = \frac{1}{2}e^{x+y} + c(x - y)\ .$$

Nun erzwingt die Randbedingung, dass

$$\frac{1}{2}e^x + c(x) = \cos(x)\ ,$$

also

$$c(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}e^x\,.$$

Die Lösung der DGL lautet somit

$$u(x,y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{x-y}) + \cos(x-y)\,.$$

Aufgabe H36 (Lineare partielle DGL)

Gegeben sei die partielle Differenzialgleichung

$$v_t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} v_x, \qquad v(x,0) = \begin{pmatrix} 3x \\ x^2-1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Lösung.

Lösung: Wir gehen wie auf Folie 225ff vor. Dazu bestimmen wir zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren. Diese sind

$$\lambda_1 = 4, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -2, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen nun

$$w := T^{-1}v$$

und erhalten die Differenzialgleichung

$$w_t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} w_x,$$

welche in die folgenden Transportgleichungen zerfällt:

$$\begin{aligned} w_{1,t} = 4w_{1,x} \quad &\Leftrightarrow \quad w_{1,t} - 4w_{1,x} = 0 \\ w_{2,t} = -2w_{2,x} \quad &\Leftrightarrow \quad w_{2,t} + 2w_{2,x} = 0 \end{aligned}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$w(x,t) = \begin{pmatrix} h_1(-4t-x) \\ h_2(2t-x) \end{pmatrix}$$

wobei $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige, differenzierbare Funktion ist. Transformieren wir die Anfangsbedingung, so erhalten wir

$$w(x,0) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3x \\ x^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Einsetzen ergibt die Funktionen

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \\ h_2(x) &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Somit lautet die transformierte Lösung

$$w(x,t) = \begin{pmatrix} 8t^2 + 4tx + \frac{1}{2}x^2 + 6t + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \\ -2t^2 + 2tx - \frac{1}{2}x^2 - 3t + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Rücktransformation liefert uns nun die Lösung

$$v(x,t) = Tw(x,t) = \begin{pmatrix} 6t^2 + 6tx + 3t + 3x \\ 10t^2 + 2tx + x^2 + 9t - 1 \end{pmatrix}.$$