Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
21. Dezember 2007

# 10. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

## Gruppenübung

**Aufgabe G33** (Wiederholung: Laplace-Transformation)
Bestimmen Sie die Lösung zum folgenden Anfangswertproblemen:

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

**Lösung:** Laplace-Transformation ergibt

$$s^2\mathfrak{L}(y) - 2s - 1 + 4\mathfrak{L}(y) = 0.$$

Umstellen liefert

$$\mathfrak{L}(y) = \frac{2s+1}{s^2+4} = \frac{2s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4}.$$

Damit ergibt sich die Lösung (Streckungseigenschft, Vorlesungsfolien s. 172)

$$y = 2\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t).$$

**Aufgabe G34** (Randwertproblem)
Gegeben sei das folgende Randwertproblem:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x + 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 2 \tag{1}$$

(i) Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung von (1).
*Hinweis:* Ansatz vom Typ der rechten Seite (vgl. Folie 48).

(ii) Transformieren (1) anhand des Ergebnisses aus (i) in ein halbhomogenes Randwertproblem mit homogener Differentialgleichung.

(iii) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Lösung von (1).

(iv) Geben Sie die Gesamtlösung von (1) an.

**Lösung:**

(i) Mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite ($y_P = Ax + b$) ergibt sich

$$y_p(x) = x - 1$$

(ii) Das transformierte Randwertproblem lautet (mit $z = y - y_p$)

$$z'' + 2z' + z = 0, \qquad \begin{aligned} z(0) &= 0 - y_p(0) = 1 \\ z(1) + z'(1) &= 2 - y_p(1) - y_p'(1) = 1 \end{aligned}$$

(iii) Das charakteristische Polynom lautet

$$(\lambda + 1)^2 = 0,$$

damit ergibt sich das Fundamentalsystem

$$z_1(x) = e^{-x}, z_2(x) = xe^{-x}$$

(iv) Die allgemeine Lösung von (1) lautet

$$y(x) = y_p(x) + c_1 \cdot z_1(x) + c_2 \cdot z_2(x) = x - 1 + c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot xe^{-x}$$

Wir müssen jetzt noch die Konstanten $c_1$ und $c_2$ bestimmen, so dass die Randbedingungen erfüllt sind.
Wir bestimmen die Matrix $R$ und den Vektor $\gamma$ mit $Rc = \gamma$ :

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1(1) + z_1'(1) & z_2(1) + z_2'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \\ \gamma &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt $\det R = e^{-1} \neq 0$, also sind die Koeffizienten $c_1$ und $c_2$ eindeutig bestimmt:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = e$$

Damit lautet die Lösung von (1)

$$y(x) = x - 1 + e^{-x} + xe^{1-x}.$$

**Aufgabe G35** (Randwertprobleme)
Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Randwertprobleme:

(a) $y''(x) + y(x) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

(b) $y''(x) + y(x) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

(c) $y''(x) - y(x) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$

**Lösung:**

(a) Für die Transformation in ein halbhomogenes Randwertproblem mit homogener Differentialgleichung bestimmen wir eine partikuläre Lösung $y_p$. Man kann leicht $y_p \equiv 1$ erraten. Damit lautet das transformierte Problem

$$z''(x) + z(x) = 0, \quad z(0) = 0 - y_p(0) = -1, \quad z(\pi) = 0 - y_p(\pi) = -1 \tag{1}$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Damit bestimmen wir ein reelles Fundamentalsystem für die Lösung von (1):

$$z_1(x) = \sin x, \quad z_2(x) = \cos x$$

Damit lautet die Matrix $R$

$$R = \begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1(\pi) & z_2(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und der Vektor $\gamma$

$$\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem $Rc = \gamma$ ist nicht lösbar. Folglich hat das Randwertproblem keine Lösung.

(b) $y''(x) + y(x) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
Da die Differentialgleichung bei diesem Randwertproblem die selbe ist wie in a), stimmen auch die partikuläre Lösung und das Fundamentalsystem mit denen aus a) überein. Das transformierte Problem lautet in diesem Fall

$$z''(x) + z(x) = 0, \quad z(0) = 0 - y_p(0) = -1, \quad z(\frac{\pi}{2}) = 0 - y_p(\frac{\pi}{2}) = -1$$

Es gilt

$$R = \begin{pmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1(\frac{\pi}{2}) & z_2(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem $Rc = \gamma$ hat die eindeutige Lösung

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also lautet die Lösung des Randwertproblems

$$y(x) = 1 - \sin x - \cos x$$

(c) $y''(x) - y(x) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
Eine partikuläre Lösung lautet $y_p \equiv -1$. Damit lautet das transformierte Problem

$$z''(x) - z(x) = 0, \quad z(0) = 1, \quad z(\pi) = 1. \tag{2}$$

Das charakteristische Polynom dazu lautet

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Ein Fundamentalsystem für die Lösung von (2) ist damit gegeben durch

$$z_1(x) = e^x, \quad z_2(x) = e^{-x}.$$

Damit gilt

$$R = \begin{pmatrix} e^0 & e^{-0} \\ e^{\pi} & e^{-\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\pi} & e^{-\pi} \end{pmatrix}$$

und

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar:

$$c_1 = \frac{e^{-\pi} - 1}{e^{-\pi} - e^{\pi}}, \quad c_2 = \frac{1 - e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}}.$$

Damit lautet die Lösung des Randwertproblems

$$y(x) = -1 + \frac{e^{-\pi} - 1}{e^{-\pi} - e^{\pi}} \cdot e^x + \frac{1 - e^{\pi}}{e^{-\pi} - e^{\pi}} \cdot e^{-x}.$$

# Hausübung

**Aufgabe H31** (Randwertproblem)

Es sei ein Balken der Länge $l$ gegeben, der an beiden Enden getragen und mit einer konstanten Last belegt wird. Für kleine Durchbiegungen folgt für die Biegelinie $y(x)$ die Differenzialgleichung

$$y'' = -m.$$

Untersuchen Sie für die folgenden Fälle, ob keine, eine oder mehrere Lösungen des Randwertproblems existieren:

(i) Die Enden des Balkens werden fest gestützt, also $y(0) = y(l) = 0$.

(ii) Die Enden des Balkens werden fest eingespannt, aber in der Höhe verstellbar: $y'(0) = 0$, $y'(l) = -lm$.

(iii) Wie in (ii), aber mit $y'(0) = y'(l) = 0$.

(iv) Der Balken ist links gestützt ($y(0) = 0$) und rechts eingespannt ($y'(l) = 0$).

Geben Sie jeweils die Lösungen an.

**Lösung:** Die allgemeine Lösung des Problems erhält man einfach durch das zweifache Integrieren der gegebenen Differenzialgleichung. Die Lösung hat die Form

$$y(x) = c_1 + c_2 x - \frac{1}{2} m x^2 .$$

Im Falle

(i) folgt $c_1 = y(0) = 0$ und $0 = y(l) = c_2 l - ml^2/2$, also $c_2 = ml/2$. Das Problem ist also eindeutig lösbar,

(ii) folgt $c_2 = y'(0) = 0$ und $-ml = y'(l) = -ml$, hier hat man also unendlich viele Lösungen $y(x) = c_1 - mx^2/2$,

(iii) liefern hingegen die Randbedingungen, dass $c_2 = 0$ und $0 = y'(l) = -ml$, also sind diese Randbedingungen nicht erfüllbar,

(iv) erhalten wir $c_1 = 0$ und $0 = y'(l) = c_2 - ml$, also $c_2 = ml$, eine eindeutige Lösung.

**Aufgabe H32** (Laplace-Transformation)

Lösen Sie das folgende AWP mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$y'' + 2y' + y = 2\cos t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$$

*Hinweis:* Bevor Sie die Partialbruchzerlegung bei der Rücktransformation machen, schauen Sie sich den entstandenen Bruch genauer an: Vielleicht fällt Ihnen die Partialbruchzerlegung sofort (ohne Rechnen) ein.

**Lösung:** Gegeben ist:

$$y'' + 2y' + y = 2\cos t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$$

Transformierte von beiden Seiten mit Ausnutzung der Linearität:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}(y'' + 2y' + y) = \mathfrak{L}(2\cos t) \\ \Leftrightarrow\ &\mathfrak{L}(y'') + 2\mathfrak{L}(y)' + \mathfrak{L}(y) = 2\mathfrak{L}(\cos t). \end{aligned}$$

Mit dem Satz 2 (Kapitel Laplace-Transformation, Vorlesungsfolie 174) erhält man

$$\underbrace{\left[s^2\mathfrak{L}(y) - sy(0) - y'(0)\right]}_{\mathfrak{L}(y'')} + 2\underbrace{\left[s\mathfrak{L}(y) - y(0)\right]}_{\mathfrak{L}(y')} + \mathfrak{L}(y) = 2\frac{s}{s^2+1}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(y)(s^2+2s+1) &= 2 + \frac{s}{s^2+1} = \frac{2s^2+2s+2}{s^2+1} \\ \to \quad \mathfrak{L}(y) &= \frac{2s^2+2s+2}{(s+1)^2(s^2+1)}. \end{aligned}$$

Transformation zurück: Der Standardweg ist die Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz

$$\frac{2s^2+2s+2}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{as+b}{(s+1)^2} + \frac{cs+d}{s^2+1}.$$

Mit genauem Hinschauen sieht man hier gleich (kommt mit der Übung, genau dafür macht man das ja auch ;-)), dass

$$\frac{2s^2+2s+2}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{(s^2+2s+1)+(s^2+1)}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{(s+1)^2+(s^2+1)}{(s+1)^2(s^2+1)} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s^2+1}.$$

Damit

$$y = \mathfrak{L}^{-1}(\mathfrak{L}(y)) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s^2+1}\right) = te^{-t} + \sin t.$$

**Aufgabe H33** (Randwertproblem)

Lösen Sie das Randwertproblem

$$y'' + 2y' + y = x^2\,, \qquad y'(0) = y'''(0), \quad y(0) + y''(0) + y'''(0) = 0.$$

**Lösung:** Das charakteristische Polynom der gegebenen Differentialgleichung lautet

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -1.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist damit $y_H = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$, mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite ($y_p = Ax^2+Bx+C$) findet man leicht die partikuläre Lösung $y_p = x^2-4x+6$, also ist die allgemeine Lösung gleich

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + x^2 - 4x + 6\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} y'(x) &= -c_1e^{-x} + c_2(1-x)e^{-x} + 2x - 4\,, \\ y''(x) &= c_1e^{-x} + c_2(x-2)e^{-x} + 2\,, \\ y'''(x) &= -c_1e^{-x} + c_2(3-x)e^{-x}\,. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen ergeben eingesetzt

$$-c_1 + c_2 - 4 = -c_1 + 3c_2\,, \qquad \text{also} \qquad c_2 = -2\,,$$

und

$$c_1 + 6 + c_1 - 2c_2 + 2 - c_1 + 3c_2 = 0\,, \qquad \text{also} \qquad c_1 = -6\,.$$

Die Lösung lautet also

$$y(x) = -6e^{-x} - 2xe^{-x} + x^2 - 4x + 6\,.$$

# ***Frohe Weihnachten***

# ***und***

# ***einen guten Rutsch ins neue Jahr!***