Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
14. Dezember 2007

9. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G29 (Zum warm werden)

Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

(a) Jede Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ besitzt eine Laplace-Transformierte. [ ] ja [ ] nein

(b) Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}\{f\}$ einer L-transformierbaren Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion

i. [ ] mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$

ii. [ ] mit Definitionsbereich $[0, \infty)$

iii. [ ] mit einem von f abhängigen Definitionsbereich

iv. [ ] mit einem Definitionsbereich der Form $[a, \infty)$ oder (a, ∞)

(c) Die Funktion $F(s) = \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}$ ist die Laplace-Transformierte von

i. [ ] $f(t) = 2t + 3t^2$

ii. [ ] $f(t) = \frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}$

iii. [ ] $f(t) = 2 + 3t$

iv. [ ] $f(t) = 2e^{-t}t + 3e^{-2t}$

Lösung:

(a) Jede Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ besitzt eine Laplace-Transformierte. [ ] ja [X] nein

(b) Die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}\{f\}$ einer L-transformierbaren Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion

i. [ ] mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$

ii. [ ] mit Definitionsbereich $[0, \infty)$

iii. [X] mit einem von f abhängigen Definitionsbereich

iv. [X] mit einem Definitionsbereich der Form $[a, \infty)$ oder (a, ∞)

(c) Die Funktion $F(s) = \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}$ ist die Laplace-Transformierte von

i. [ ] $f(t) = 2t + 3t^2$

ii. [ ] $f(t) = \frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}$

iii. [X] $f(t) = 2 + 3t$

iv. [ ] $f(t) = 2e^{-t}t + 3e^{-2t}$

Aufgabe G30 (Laplace-Transformierte)

Man berechne die Laplace-Transformierten folgender Funktionen:

(a) $f(t) = \sinh t - \sin t$

(b) $f(t) = \cosh(t)$

(c) $f(t) = \sin(4t)$

(d) $f(t) = (t-1)^2 e^{-2t}$

Lösung:

(a) Aufgrund der Linearität (Folien, Kap. 8, Satz 1.1) gilt:
$\mathcal{L}\{\sinh t - \sin t\} = \mathcal{L}\{\sinh t\} - \mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{2}{s^4-1}$.

(b) Alternative 1: Laut Definition von cosh gilt $\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. Damit gilt mit der Linearität

$$\mathcal{L}\{\cosh(t)\} = \mathcal{L}\{\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}\{e^t\} + \mathcal{L}\{e^{-t}\}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}) = \frac{s}{s^2-1}.$$

Alternative 2: Es gilt $\cosh(t) = (\sinh(t))'$. Mit Satz 2 in Kap. 8 der Folien gilt dann

$$\mathcal{L}\{\cosh(t)\} = \mathcal{L}\{(\sinh(t))'\} = s \cdot \mathcal{L}\{\sinh(t)\} - \sinh(0) = s \cdot \frac{1}{s^2-1},$$

da $\sinh(0) = 0$.

(c) Wir wenden Satz 1.2 in Kap. 8 der Folien $\mathcal{L}\{f(ct)\}(s) = \frac{1}{c}\mathcal{L}\{f(t)\}(\frac{1}{c}s)$ an. Somit ist

$$\mathcal{L}\{\sin(4t)\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{1}{4}s)^2} = \frac{4}{16 + s^2}.$$

(d) Für $g := (t-1)^2$ und $G := \mathcal{L}\{f\}$ gilt $\mathcal{L}\{(t-1)^2 e^{-2t}\} = G(s+2)$ laut Dämpfungs- und Verschiebungssatz (Satz 3, Folien 8). Aus der Linearität folgt

$$\mathcal{L}\{(t-1)^2\} = \mathcal{L}\{t^2 - 2t + 1\} = \mathcal{L}\{t^2\} - 2\mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\{1\} = \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

Es folgt:

$$\mathcal{L}\{(t-1)^2 e^{-2t}\} = \frac{2}{(s+2)^3} - \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}.$$

Aufgabe G31 (Rücktransformation)

Bestimmen Sie jeweils die Originalfunktion zu den folgenden Laplace-Transformierten:

(a) $F_1(s) = \frac{s+4}{s^2+4s-5}$ (Partialbruchzerlegung),

(b) $F_2(s) = \ln(s+2) + \ln(s+1)$ (Differentiationssatz),

(c) $F_3(s) = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^3}$ (Dämpfungs- und Verschiebungssatz).

Lösung:

(a) Da $s^2 + 4s - 5 = (s+5)(s-1)$ ist, lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{s+4}{s^2+4s-5} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+5}.$$

Es ergibt sich $A = 5/6$ und $B = 1/6$, also

$$\frac{s+4}{s^2+4s-5} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s+5}.$$

Mit der Linearität der Laplace-Transformation folgt

$$f_1(s) = \frac{5}{6}\exp(t) + \frac{1}{6}\exp(-5t).$$

(b) Es ist

$$F_2'(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{\exp(-2t)\} + \mathcal{L}\{\exp(-t)\}.$$

Andererseits gilt nach dem Differentiationssatz (Satz 2.1 in Kap. 8 der Folien) $F_2(s)' = -\mathcal{L}\{tf_2(t)\}$, also ergibt sich

$$f_2(t) = -\frac{1}{t}\exp(-2t) - \frac{1}{t}\exp(-t).$$

(c) Es ist $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$ und $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$. Mit dem Dämpfungs- und Verschiebungssatz(Satz 3 in Kap. 8 der Folien) folgt somit

$$f_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+2)^3}\right\} = t\exp(-2t) + \frac{t^2}{2}\exp(-2t).$$

Aufgabe G32 (Lineares AWP mittels Laplace-Transformation lösen)
Lösen Sie das folgende lineare Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = e^t\ ,\ y(0) = 1\ ,\ \dot{y}(0) = 0$$

Lösung: Sei $Y := \mathcal{L}\{y\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1} &= \mathcal{L}\{\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y\} \\
&= \mathcal{L}\{\ddot{y}\} + 3\mathcal{L}\{\dot{y}\} + 2\mathcal{L}\{y\} \\
&= s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - \dot{y}(0) + 3(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)) + 2\mathcal{L}\{y\} \\
&= s^2Y - s + 3sY - 3 + 2Y \\
&= (s^2 + 3s + 2)Y - (s+3)
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{(s-1)(s^2+3s+2)} + \frac{s+3}{s^2+3s+2} \\
&= \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\
&= \frac{1 + (s-1)(s+3)}{(s-1)(s+1)(s+2)} \\
&= \frac{s^2+2s-2}{(s-1)(s+1)(s+2)}
\end{aligned}$$

Wir machen eine Partialbruchzerlegung. Ansatz:

$$\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} = \frac{A(s^2+3s+2) + B(s^2+s-2) + C(s^2-1)}{(s-1)(s+1)(s+2)} \overset{!}{=} \frac{s^2+2s-2}{(s-1)(s+1)(s+2)}$$

Es folgt:

$$\begin{array}{rcl} A + B + C &=& 1 \\ 3A + B &=& 2 \\ 2A - 2B - C &=& -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 3A - B &=& -1 \\ 3A + B &=& 2 \\ 2A - 2B - C &=& -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 6A &=& 1 \\ 3A + B &=& 2 \\ 2A - 2B - C &=& -2 \end{array}$$

also $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{3}{2}$ und $C = -\frac{2}{3}$, und somit

$$Y = \frac{1}{6}\frac{1}{s-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{s+2}.$$

Da auch die Originalfunktionen zu den Laplace-Transformierten $\frac{1}{s-1}$, $\frac{1}{s+1}$ und $\frac{1}{s+2}$ bekannt sind, können wir nun die Lösung der DGL direkt angeben. Sie lautet:

$$y(t) = \frac{1}{6}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-2t}.$$

Hausübung

Aufgabe H27 (Laplace-Transformierte)

Berechnen Sie die Laplace-Transformierten der folgenden Funktionen:

(a) $f_1(t) = 3\cosh(t) - \cos(2t)$ (Linearität),

(b) $f_2(t) = (t/2)\sin(4t)$ (Differentiationssatz),

(c) $f_3(t) = (t-1)^2 e^{-t}$ (Dämpfungs- und Verschiebungssatz).

Lösung:

(a) Mit dem Streckungssatz (Satz 1.2 in Kap. 8 der Folien) gilt

$$\mathcal{L}\{cos(2t)\}(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{cos(t)\}(\frac{1}{2}s) = \frac{s}{4+s^2}.$$

Aus der Linearität folgt.

$$F_1(s) = \frac{3s}{s^2-1} - \frac{s}{s^2+4}.$$

(b) Differentiationssatz: $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F(s)'$. Also erhält man

$$F_2(s) = \mathcal{L}\{t\frac{1}{2}\sin(4t)\} = -\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{\sin(4t)\}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\frac{4}{s^2+16}\right)' = \frac{4s}{(s^2+16)^2}.$$

(vgl. Gruppenübung für $\mathcal{L}\{\sin(4t)\}$)

(c) Dämpfungs- und Verschiebungssatz: $\mathcal{L}\{\exp(-at)f(t)\} = F(s+a)$. Da

$$\mathcal{L}\{(t-1)^2\} = \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}$$

gilt (vgl. Gruppenübung), ergibt sich

$$F_3(s) = \frac{2}{(s+1)^3} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}.$$

Aufgabe H28 (Rücktransformation)

Bestimmen Sie jeweils die Originalfunktion zu den folgenden Laplace-Transformierten:

(a) $F(s) = \frac{s+1}{s^2+s-6}$

(b) $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$
(Es genügt hier, wenn Sie das Ergebnis als Faltung zweier Funktionen angeben.)

(c) $F(s) = \ln(\frac{s+1}{s-1})$

Lösung:

(a) Mittels Partialbruchzerlegung berechnen wir:

$$\frac{s+1}{s^2+s-6} = \frac{s+1}{(s+3)(s-2)} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{s-2} + \frac{2}{s+3}\right).$$

Aufgrund des Linearitätssatzes reicht es aus, die Originalfunktionen zu $\frac{1}{s-2}$ und $\frac{1}{s+3}$ zu kennen. Laut Beispiel aus den Folien sind das e^{2t} und e^{-3t}. Die gesuchte Originalfunktion ist also

$$f(t) = \frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}.$$

(b) Die Laplace-Transformierte ist das Quadrat der bekannten Laplace-Transformierten $\frac{1}{s^2+1}$. Damit können wir den Faltungssatz (Satz 4, Kap. 8 der Folien) benutzen. Es folgt:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{(s^2+1)}\right)^2\right\} = \int_0^t \sin(t-u)\sin u \; \mathrm{d}u = (\sin * \sin)(t).$$

Nach einer längeren Rechnung (wird hier aber nicht verlangt) ist dies $f(t) = \frac{\sin t - t\cos t}{2}$.

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned} -F'(s) &= -(\ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right))' = -\left(\frac{(s-1)}{(s+1)} \cdot \frac{(s-1-(s+1))}{(s-1)^2}\right) = -\left(\frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{-2}{(s-1)}\right) \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{e^t\} - \mathcal{L}\{e^{-t}\} = \mathcal{L}\{e^t - e^{-t}\} = \mathcal{L}\{tf(t)\}. \end{aligned}$$

(In den obigen Schritten wurde Partialbruchzerlegung, Linearität und der Differentiationssatz benutzt.)

oder die Ableiung einfacher bestimmen, indem man $\ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right) = \ln(s+1) - \ln(s-1)$ ausnutzt.

Es folgt

$$f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t} = \frac{2}{t}\sinh t.$$

Aufgabe H29 (Laplace-Transformation und "Eigenwertansatz")

Lösen Sie das folgende lineare Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} - 5y = 0\ ,\ y(0) = 1\ ,\ \dot{y}(0) = 0.$$

Vergleichen Sie die Lösung mit dem bisher getätigten Ansatz (Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen, dann die Lösung aus der allgemeine Lösung der homogenen DGL durch Einsetzen der Anfangswerte bestimmen). Versuchen Sie nicht nur das Endergebnis zu vergleichen, sondern auch in den Lösungsschritten Zusammenhänge zu finden.

Lösung: Sei $Y := \mathcal{L}\{y\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{0\} = 0 &= \mathcal{L}\{\ddot{y} + 4\dot{y} - 5y\} \\ &\overset{\text{Lin.}}{=} \mathcal{L}\{\ddot{y}\} + 4\mathcal{L}\{\dot{y}\} - 5\mathcal{L}\{y\} \\ &= s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - \dot{y}(0) + 4(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)) - 5\mathcal{L}\{y\} \\ &= s^2Y - s + 4sY - 4 - 5Y \qquad (1) \\ &= (s^2 + 4s - 5)Y - (s+4) \qquad (2) \end{aligned}$$

Vergleich: Man beachte, daß $(s^2 + 4s - 5)$ gerade das charakteristische Polynom der DGL ist (nur über s statt über λ geschrieben). Das liegt daran, daß laut Satz 2, Kap. 8 der Folien $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ gilt.

Es folgt:

$$Y(s) = \frac{4+s}{s^2+4s-5} = \frac{4+s}{(s+5)(s-1)} = \frac{1}{6}\frac{1}{s+5} + \frac{5}{6}\frac{1}{s-1}$$

Die letzte Umformung wird mit einer Partialbruchzerlegung bestimmt (für $\frac{4+s}{(s+5)(s-1)} \overset{!}{=} \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s-1}$ folgt $A + B = 1$ und $-A + 5B = 4$, also erhalten wir durch Addition der Gleichungen $6B = 5$, d.h., $B = \frac{5}{6}$, womit wir durch Einsetzen wiederum $A = \frac{1}{6}$ berechnen können).

Vergleich: bei der Partialbruchzerlegung lauten die Nenner der gefundenen Brüche gerade $s+5$ und $s-1$. Die Zahlen -5 und 1 sind dabei die Nullstellen von $s^2 + 4s - 5$, also des charakteristischen Polynoms.

Für die Laplace-Transformierten $\frac{1}{s+5}$ und $\frac{1}{s-1}$ lauten die Originalfunktionen e^{-5t} und e^{t}, also lautet die Lösung der DGL

$$y(t) = \frac{1}{6}e^{-5t} + \frac{5}{6}e^{t}.$$

Vergleich: Da -5 und 1 gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, bilden die Originalfunktionen e^{-5t} und e^{t} für die Laplace-Transformierten $\frac{1}{s+5}$ und $\frac{1}{s-1}$ gerade das aus Satz 6.1 des Arbeitsbuches bekannte Fundamentalsystem. Die Zähler $\frac{1}{6}$ und $\frac{5}{6}$ der bei der Partialbruchzerlegung entstandenen Brüche, die dann auch die Koeffizienten vor den Funktionen aus dem Fundamentalsystem bilden, sind wiederum aus dem Term $s+4$ in Gleichung (2) entstanden, also letztlich aus den Anfangswertbedingungen. Damit haben wir in dieser Lösung sozusagen in einem Arbeitsgang sowohl das Fundamentalsystem als auch die spezielle Lösung der DGL über die Laplace-Transformation bestimmt.

Aufgabe H30 (Zusatzaufgabe: Zum Nachdenken)

Können $1, s, s^n$ für $n \in \mathbb{N}$, und e^s Laplace-Transformierte sein?

Lösung: Für jede Laplace-Transformierte F gilt $\lim_{s\to\infty} |F(s)| = 0$.
Dies ist aber von keiner der angegebenen Funktionen erfüllt, also kann keine von ihnen eine Laplace-Transformierte sein.