Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
07. Dezember 2007

8. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G26 (Stabilität linearer Systeme)

Gegeben sei das System $y' = Ay$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen sie die Stabilität des Systems via
   i) Berechnung der Eigenwerte
   ii) des Routh-Hurwitz-Kriteriums.

b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus i) und ii). Erhalten sie dieselben Stabilitätsaussagen, so begründen Sie dies. Erhalten Sie unterschiedliche Stabilitätsaussagen, so erklären Sie den Grund und geben an, ob das System stabil ist, oder nicht.

Lösung:

a) i) Wir bestimmen das charakteristische Polynom von A. Es lautet

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda) + 9(-2-\lambda) = (\lambda+2)(\lambda^2+8). \tag{1}$$

Somit ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \sqrt{8}i$ und $\lambda_3 = -\sqrt{8}i$. Da wir drei unterschiedliche Eigenwerte erhalten, gibt es kein Jordankästchen der Dimension > 1. Somit genügt es nach Satz 1 (Folie 156), dass $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$ ist. Dies ist der Fall, und somit ist das System stabil.

ii) Nach (1) lauten die Koeffizienten

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 8 \quad \text{und} \quad a_3 = 16.$$

Somit ergibt sich für das Routh-Hurwitz-Kriterium die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 16 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 16 \end{pmatrix}.$$

Die Hauptabschnittsunterdeterminanten lauten

$$\begin{aligned} \det(2) &= 2 \\ \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 16 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}\right) &= 0 \qquad \text{und} \\ \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 16 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 16 \end{pmatrix}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Somit sind nicht alle Hauptabschnittsunterdeterminanten größer als 0. Damit kann nach diesem Kriterium keine Aussage über die Stabilität getroffen werden.

b) Nach i) ist das System stabil und nach ii) kann keine Aussage getroffen werden. Also ist das System stabil. Es ist kein Widerspruch, da ii) nicht die Aussage liefert, dass das System nicht stabil ist.

Aufgabe G27 (DGL n-ter Ordnung)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = \cos(x), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und berechnen Sie dessen Nullstellen.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung durch Angabe eines Fundamentalsystems.

c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung durch einen speziellen Ansatz und geben Sie die gesamte allgemeine Lösung an.
Hinweis: Welcher Ansatz für die partikuläre Lösung eignet sich ganz gut bei dieser Inhomogenität?

d) Bestimmen sie die Konstanten gemäß der Anfangsbedingungen.

Lösung:

a) Das charakteristische Polynom lautet

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 - \lambda - 2 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Damit hat es die Nullstellen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \qquad \text{und} \\ \lambda_2 &= 2. \end{aligned}$$

b) Die Funktionen $y_1(x) = e^{2x}$ und $y_2(x) = e^{-x}$ bilden ein Fundamentalsystem (siehe auch Satz 7, Folie 147/148). Damit lautet die allgemeine homogene Lösung

$$y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

c) Passender Ansatz für die rechte Seite:

$$\begin{aligned} y_P(x) &= A\cos x + B\sin x \\ y_P'(x) &= -A\sin x + B\cos x \\ y_P''(x) &= -A\cos x - B\sin x \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$\begin{aligned} & -A\cos x - B\sin x - (-A\sin x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\sin x) = \cos x \\ \Leftrightarrow\quad & (-3A - B)\cos x + (A - 3B)\sin x = \cos x. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} -3A - B &= 1 \\ A - 3B &= 0. \end{aligned}$$

Damit

$$A = -\frac{3}{10} \quad \text{und} \quad B = -\frac{1}{10}.$$

Eine partikuläre Lösung der DGL lautet demnach

$$y_P(x) = -\frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\sin x.$$

Damit ist die allgemeine Gesamtlösung gegeben durch

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\sin x. \tag{1}$$

d) Zur Bestimmung der Konstanten benötigen wir die Ableitung $y'(x)$:

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x} + \frac{3}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x \tag{2}$$

Aus (1) ergibt sich

$$c_1 + c_2 - \frac{3}{10} = 2$$

und aus (2) ergibt sich

$$2c_1 - c_2 - \frac{1}{10} = 1.$$

Es folgt $c_1 = \frac{17}{15}$ und $c_2 = \frac{7}{6}$. Damit lautet die Gesamtlösung

$$y(x) = \frac{17}{15}e^{2x} + \frac{7}{6}e^{-x} - \frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\sin x.$$

Aufgabe G28 (Stationärer Punkt)

Sei

$$f(x,y) := 3x^2 - xy + 2y^2 + \frac{1}{2}\sin^2 x\cos^2 y.$$

Zeigen Sie mittels Satz 5 der Vorlesung (Kapitel: Stabilität, Folie 156), dass $z^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein stabiler stationärer Punkt von

$$\dot z = -\nabla f(z) \quad , \quad z(0) = z_0 \quad , \quad z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

ist (dieser ist sogar der einzige).

Hinweis: Wenn $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ symmetrisch sind und $a_{ii} > 0$ ist, dann erfüllen die Eigenwerte von $A + B$ die Ungleichung

$$\lambda > \min\{a_{ii} - \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \;:\; 1 \le i \le n\}.$$

Für eine Abschätzung bietet es sich an, die Formel $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ zu benutzen.

Lösung: Es gilt:

$$\dot{z} = -\nabla f(z) = -\begin{pmatrix} 6x - y + \sin x \, \cos x \, \cos^2 y \\ -x + 4y - \sin y \, \cos y \, \sin^2 x \end{pmatrix}$$

Da $\dot{z}$ per Definition ein Potential besitzt, ist die Jakobimatrix von $\dot{z}$ symmetrisch. Es gilt:

$$\mathfrak{J}_F(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}_{=:A} + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos^2 y(\cos^2 x - \sin^2 x) & -2\sin x \, \cos x \, \sin y \, \cos y \\ -2\sin x \, \cos x \, \sin y \, \cos y & -\sin^2 x(\cos^2 y - \sin^2 y) \end{pmatrix}}_{=:B}$$

Wir wenden den ersten Hinweis an. Sei dazu A die linke und B die rechte Matrix.
Für $i = 1$ gilt dann:

$$6 - |b_{11}| - |b_{12}| - |a_{12}| \geq 6 - 2 - 2 - 1 = 1$$

Die zweite Ungleichung gilt, da b_{11} und b_{12} aus cos- und sin-Termen zusammengesetzt sind, die wir nach oben durch 1 abschätzen können.
Für $i = 2$ gilt:

$$\begin{aligned} 4 - |b_{21}| - |b_{22}| - |a_{21}| &\geq 4 - |2\sin x \, \cos x \, \sin y \, \cos y| - |\sin^2 x(\cos^2 y - \sin^2 y)| - 1 \\ &= 4 - |\frac{1}{2}\sin 2x \frac{1}{2}\sin 2y| - |\sin^2 x(\cos^2 y - \sin^2 y)| - 1 \\ &\geq 4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - 2 - 1 \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(Man sieht leicht, daß die für $i = 1$ benutzten, gröberen Abschätzungen der sin- und cos-Terme durch 1 hier nicht zum Ziel führt).
Es folgt also:

$$\lambda > \min\{1, \frac{3}{4}\} = \frac{3}{4}$$

für beliebige Eigenwerte λ von $\mathfrak{J}_F(x)$.
Damit hat $\dot{z}$ nach Satz 5 (Folie 165) genau eine Nullstelle, die ein stabiler stationärer Punkt von $\dot{z} = -\nabla f(z)$ ist. Da aber z^* offensichtlich eine Nullstelle von $\nabla f(z)$ ist, ist gerade z^* diese eindeutige Nullstelle und damit ein stabiler stationärer Punkt von $\dot{z} = -\nabla f(z)$.

Hausübung

Aufgabe H24 (Stabilität linearer Systeme)
Untersuchen Sie, ob die DGL $y' = A_i y$ stabil ist für

$$A_1 = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 10 & -19 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Für A_1 gilt:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 26\lambda + 103$$

Also

$$\lambda_{1,2} = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 103}}{2} \simeq \frac{-26 \pm 16.25}{2}$$

Die Realteile beider Nullstellen sind negativ, also ist die DGL stabil.

(b) Für A_2 gilt:

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= (1-\lambda)^2(-2-\lambda) - (1-\lambda) + (1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)^2(-2-\lambda)
\end{aligned}
$$

Damit ist $\lambda_1 = -2$ eine einfache und $\lambda_2 = 1$ eine doppelte Nullstelle.
Da es Nullstellen mit positivem Realteil gibt, ist dieses System nicht stabil.

Aufgabe H25 (Routh-Hurwitz-Kriterium)

Prüfen Sie mittels des Routh-Hurwitz-Kriteriums, ob die Nullstellen λ_i von

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2x - 4$$

alle das Kriterium $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ erfüllen.

Lösung: Die Matrix H ist:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Die erste Hauptabschnittsunterdeterminante ist -3. Damit gibt es nach dem Routh-Hurwitz-Kriterium (Satz 2, Folie 157) eine Nullstelle λ mit $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$.

Aufgabe H26 (Inhomogenes DGL-System)

Gegeben sei das inhomogene lineare System

$$y' = Ay + b(x)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ -1 & 23 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b(x) = \begin{pmatrix} e^{20x} \\ xe^{20x} \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt[1], dass die allgemeine homogene Lösung

$$y_H = c_1 e^{20x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{20x} \begin{pmatrix} 3x+1 \\ x \end{pmatrix}$$

lautet. Bestimmen Sie nun die allgemeine inhomogene Lösung.

Lösung: Wir bestimmen eine partikuläre Lösung mit Variation der Konstanten. Wir setzen

$$y_P = c_1(x) e^{20x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(x) e^{20x} \begin{pmatrix} 3x+1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Aus dem Ansatz “Variation der Konstanten” folgt $W \cdot c' = b$ mit der Matrix W mit den Fundamentalsystem als Spalten, dem Koeffizientenvektor c und der Inhomogenität b (man erhält das durch Differenzieren und Einsetzen von y_P in die DGL). Somit erhalten wir die folgende Gleichung für c_1 und c_2:

$$\begin{pmatrix} 3e^{20x} & (3x+1)e^{20x} \\ e^{20x} & xe^{20x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{20x} \\ xe^{20x} \end{pmatrix}$$

[1] vgl. Folie 132ff

Daraus folgt

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{20x} & (3x+1)e^{20x} \\ e^{20x} & xe^{20x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{20x} \\ xe^{20x} \end{pmatrix}.$$

Die Inverse lautet

$$\begin{pmatrix} -xe^{-20x} & (3x+1)e^{-20x} \\ e^{-20x} & -3e^{-20x} \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xe^{-20x} & (3x+1)e^{-20x} \\ e^{-20x} & -3e^{-20x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{20x} \\ xe^{20x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 1-3x \end{pmatrix}$$

Integration liefert uns nun

$$\begin{aligned} c_1 &= \int 3x^2 \; dx = x^3, \\ c_2 &= \int (1-3x) \; dx = x - \frac{3}{2}x^2. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$y_P = x^3 e^{20x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(x - \frac{3}{2}x^2 \right) e^{20x} \begin{pmatrix} 3x+1 \\ x \end{pmatrix} = \frac{e^{20x}}{2} \begin{pmatrix} -3x^3 + 3x^2 + 2x \\ -x^3 + 2x^2 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y = y_P + y_H = \frac{e^{20x}}{2} \begin{pmatrix} -3x^3 + 3x^2 + 2x \\ -x^3 + 2x^2 \end{pmatrix} + c_1 e^{20x} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{20x} \begin{pmatrix} 3x+1 \\ x \end{pmatrix}.$$