Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
30. November 2007

7. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G23 (Wiederholung: homogenes System, inhomogenes System, Partikularlösung)
Gegeben das folgende DGL-System

$$\begin{cases} x' &= 2x + 3y + 27e^{5t}, \\ y' &= 6x - y. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des dazugehörigen homogenen Systems.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.

c) Seien Anfangswerte $x(0) = 4$ und $y(0) = -2$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösung dieses AWPs.

Lösung:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 20 = 0.$$

Eigenwerte sind die Nullstellen dieses Polynoms:

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = 5.$$

Eigenvektoren:
für $\lambda_1 = -4$ erhält man

$$(A - \lambda_1 I)v = 0 \Leftrightarrow 6v_1 + 3v_2 = 0 \Leftrightarrow v_2 = -2v_1 \quad \text{und damit z.B. einen Eigenvektor } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda_2 = 5$ erhält man

$$(A - \lambda_2 I)v = 0 \Leftrightarrow -3v_1 + 3v_2 = 0 \Leftrightarrow v_2 = v_1 \quad \text{und damit z.B. einen Eigenvektor } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

b) Die Lösung des inhomogenen Systems bekommt man mit Hilfe der Methode "Variation der Konstanten" mit dem Ansatz $W(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}' = b(t)$. Die Spalten der Matrix W werden von dem Fundamentalsystem gebildet. Damit erhält man:

$$\begin{pmatrix} e^{-4t} & e^{5t} \\ -2e^{-4t} & e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 27e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}' = \frac{1}{3e^t}\begin{pmatrix} e^{5t} & -e^{5t} \\ 2e^{-4t} & e^{-4t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9e^{9t} \\ 18 \end{pmatrix}$$

Durch das einfache Integrieren erhält man (Integrationskonstanten auf 0 gesetzt, da wir nur eine Partikularlösung finden wollen)

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{9t} \\ 18t \end{pmatrix}$$

und somit lautet die allgemeine Lösung unseres Systems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (e^{9t} + c_1)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t} + (18t + c_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

c) Mit der Bedingung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ erhält man $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$.

Die gesuchte Lösung des AWPs lautet damit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (e^{9t} + 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t} + (18t + 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Aufgabe G24 (DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

Gegeben sei die folgende Differentialgleichung:

$$y^{(4)}(x) + 2y''(x) + y(x) = 0$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung.

Lösung: Wir bestimmen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 \\ &= (\lambda^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

Dieses hat die Nullstellen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i \quad \text{(doppelt)}, \\ \lambda_2 &= -i \quad \text{(doppelt)}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir vier linear unabhängige Lösungen:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(x) &= e^{ix} \\ \tilde{y}_2(x) &= xe^{ix} \\ \tilde{y}_3(x) &= e^{-ix} \\ \tilde{y}_4(x) &= xe^{-ix} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist eine Linearkombination der Lösungen des Fundamentalsystems:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \cdot \tilde{y}_1(x) + c_2 \cdot \tilde{y}_2(x) + c_3 \cdot \tilde{y}_3(x) + c_4 \cdot \tilde{y}_4(x) \\ &= c_1 \cdot e^{ix} + c_2 \cdot xe^{ix} + c_3 \cdot e^{-ix} + c_4 \cdot xe^{-ix} \\ &= (c_1 + c_2x)e^{ix} + (c_3 + c_4x)e^{-ix}. \end{aligned}$$

Aufgabe G25 (Fundamentalsystem, Jordannormalform)
Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des folgenden Systems linearer Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y_1' &= 9y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 7y_2. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Jordannormalform muss nicht explizit bestimmt werden.

Lösung: Wir setzen

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

und können somit das System wie folgt auffassen:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von A lautet dann

$$P(\lambda) = (9-\lambda)(7-\lambda) + 1 = (\lambda - 8)^2.$$

Damit haben wir den doppelten Eigenwert $\lambda_1 = 8$. Wir wenden nun Satz 6 aus dem Skript (Folie 144) an und bestimmen zwei linear unabhängige Lösungen $z_{1,1}$ und $z_{1,2}$ der Gleichung

$$(A - \lambda_1 I)^2 z_{1,j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 z_{1,j} = 0.$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist der Lösungsraum der Gleichung $\mathbb{R}^2$ und wir wählen o.B.d.A. als linear unabhängige Lösung

$$z_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad z_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir als Fundamentalsystem:

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= \exp(8x) \cdot \sum_{\nu=0}^{1} x^\nu \left(\frac{(A-8I)^\nu}{\nu!} \right) z_{1,1} \\ &= \exp(8x) \left(z_{1,1} + x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \exp(8x) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ y_{1,2} &= \exp(8x) \cdot \sum_{\nu=0}^{1} x^\nu \left(\frac{(A-8I)^\nu}{\nu!} \right) z_{1,2} \\ &= \exp(8x) \left(z_{1,2} + x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \exp(8x) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H21 (Wiederholung: homogenes lineares AWP)

Bestimmen Sie die reelle Lösung des folgenden AWPs:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 2x + y - 2z, \\ \frac{dy}{dt} &= -x, \\ \frac{dz}{dt} &= x + y - z, \end{cases} \qquad \text{mit } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Das System bringen wir zuerst in die Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zuerst bestimmen wir die Eigenwerte der Matrix, also

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda I\right) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Daraus erhält man

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i.$$

Bestimmung der dazugehörigen Eigenvektoren:
für $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{aligned} &(A - \lambda_1 I)v = 0 \Leftrightarrow (A - 1 \cdot I)v = 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Damit $v_3 = 0$ und $v_1 = -v_2 \Rightarrow$ Ein Eigenvektor ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Analog bestimmt man den zugehörigen Eigenvektoren für den Eigenwerte i, und zwar $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da die Matrix reell ist und die $\lambda_{2,3}$ komplex-konjugiert, sind auch die zu diesen Eigenwerten zugehörige Eigenvektoren komplex-konjugiert (dazu siehe auch Folie 130), damit hat der Eigenwert $-i$ den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die allgemeine homogene Lösung ist damit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ix}.$$

Die reelle Lösung des Systems lautet damit (siehe auch Folien 130-131)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{0\cdot t} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{0\cdot t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Beim Einsetzen des Anfangswertes erhält man

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 0$$

und die gesuchte Lösung des AWP's ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + 2\cos t \\ -e^t - 2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H22 (Fundamentalsystem)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des folgenden Systems linearer Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 - 2y_3 \\ y_2' &= 4y_1 + y_2 \\ y_3' &= 2y_1 + y_2 - y_3 \end{aligned}$$

Hinweis: Die Jordannormalform muss nicht explizit bestimmt werden.

Lösung: Wir setzen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und können somit das System wie folgt auffassen:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von A lautet

$$P(\lambda) = (-1-\lambda)^2(1-\lambda) - 8 + 4(1-\lambda) + 4(1+\lambda) = (1-\lambda)(1+\lambda)^2.$$

Damit erhalten wir die Nullstellen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \qquad \text{(einfach)} \\ \lambda_2 &= -1 \qquad \text{(doppelt).} \end{aligned}$$

Wir benutzen nun Satz 6 aus dem Skript (Folie 144) um ein Fundamentalsystem zu bestimmen, ohne die Jordannormalform explizit auszurechnen. Für den Eigenwert λ_1 brauchen wir nur den zugehörigen Eigenvektor $z_{1,1}$ zu bestimmen, da die algebraische Vielfachheit von λ_1 eins ist. Wir lösen dazu die Gleichung

$$(A - \lambda_1 I)z_{1,1} = (A - I)z_{1,1} = 0$$

und erhalten als einen möglichen Eigenvektor

$$z_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenwert λ_2 mit algebraischer Vielfachheit zwei bestimmen wir zwei linear unabhängige Lösungen $z_{2,1}$ und $z_{2,2}$ der Gleichung

$$(A-\lambda_2 I)^2 z_{2,j} = (A+I)^2 z_{2,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & -8 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} z_{2,j} = 0.$$

Wir erhalten zum Beispiel die linear unabhängigen Lösungen

$$z_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad z_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die Formel aus Satz 6 (Folie 144) liefert dann das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned}
y_{1,1} &= \exp(x)\cdot z_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^x \\ e^x \end{pmatrix} \\
y_{2,1} &= \exp(-x)\cdot \sum_{\nu=0}^{1} x^\nu \left(\frac{(A+I)^\nu}{\nu!}\right) z_{2,1} \\
&= \exp(-x)\left(z_{2,1} + x\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \exp(-x)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
y_{2,2} &= \exp(-x)\cdot \sum_{\nu=0}^{1} x^\nu \left(\frac{(A+I)^\nu}{\nu!}\right) z_{2,2} \\
&= \exp(-x)\left(z_{2,2} + x\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \exp(-x)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe H23 (DGLn n-ter Ordnung)

Lösen Sie die Aufgabe H19, falls nicht bereits geschehen.

Lösung: Siehe Lösung Aufgabe H19.