Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
23.November 2007

6. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G19 (Homogene lineare Differentialgleichungssysteme)

Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem der Form

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{mit } y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, A \in \mathbb{C}^{n,n} \text{ und Anfangswert } y(0) = y_0 \in \mathbb{C}^n$$

und suchen eine Lösung y.

(a) Zeige, dass für die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ der Matrix A und für zugehörige Eigenvektoren $v_1, ..., v_n$ die Funktion

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, \quad y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \exp(\lambda_i t) v_i, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = y_0, \quad c_i \in \mathbb{C},\ i = 1, ..., n,$$

eine Lösung des obigen Differentialgleichungssystems ist.

Bemerkung: Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf ist diese zu jedem Anfangswert sogar eindeutig. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad y_0^1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad y_0^2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimme die beiden Lösungen $y^1(t)$ und $y^2(t)$ des Differentialgleichungssystems $y'(t) = Ay(t), y(0) = y_0^i$, $i = 1, 2$.

Lösung:

(a) Es gilt

$$Ay = \sum_{i=1}^{n} c_i \exp(\lambda_i t) A v_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \exp(\lambda_i t) \lambda_i v_i = y'(t).$$

Außerdem gilt

$$y(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i \exp(\lambda_i 0) v_i = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i.$$

Also bleibt, das lineare Gleichungssystem $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = y_0$, $i = 1, ..., n$, für die Bestimmung der Konstanten $c = (c_1, ..., c_n)^T$ zu lösen.

(b) Wir berechnen die EWe als Nullstellen des charakteristischen Polynoms,

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 7 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-3-\lambda)+7 = \lambda^2-2\lambda-8 = (\lambda-4)(\lambda+2),$$

und erhalten somit die EWe $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$.
Die Eigenvektoren bestimmen wir nach der Definition der Eigenräume

$$Eig_A(\lambda_i) = \{x \in \mathbb{C}^2 : (A - \lambda_i I)x = 0\}, i = 1, 2,$$

und erhalten

$$Eig_A(4) = \{x \in \mathbb{C}^2 : x = \mu(1, -\tfrac{1}{7})^T, \mu \in \mathbb{C}\}$$

da $(A - 4I)x = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -7 \end{pmatrix} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{7}x_1$, und

$$Eig_A(-2) = \{x \in \mathbb{C}^2 : x = \mu(1, -1)^T, \mu \in \mathbb{C}\}$$

da $(A + 2I)x = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -x_1$.

Die allgemeine Lösung lautet also

$$c_1 e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wie man leicht nachrechnet, sehen die Lösungen wie folgt aus,
zum Anfangswert $y^1(0) = y_0^1$ ($c_1^1 = 0, c_2^1 = -5$)

$$y^1(t) = -5\exp(-2t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und zum Anfangswert $y^2(0) = y_0^2$ ($c_1^2 = 7, c_2^2 = 2$)

$$y^2(t) = 7\exp(4t)\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix} + 2\exp(-2t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G20 (System linearer Differentialgleichungen)
Lösen Sie das System

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

durch Bestimmung der Eigenwerte und –vektoren der zugehörigen Matrix.

Lösung: Wir schreiben dies zunächst in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Nun bestimmen wir das charakteristische Polynom der Matrix: $-\lambda^3 + 3\lambda + 2$, was als Nullstellen -1, -1 und 2 hat, und erhalten als Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten $(-1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 1, 1)$. Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$C_1 \cdot e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \cdot e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G21 (Fundamentalsysteme)
Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die DGL

$$y^{(6)} - 2y^{(3)} + y = 0 ,$$

und für

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 9y'' - 10y' = 0 .$$

Lösung: Die erste DGL führt auf das Polynom $P_1(\lambda) = \lambda^6 - 2\lambda^3 + 1 = (\lambda^3 - 1)^2$. Dieses Polynom hat eine doppelte Nullstelle an jeder Nullstelle des Polynoms $\lambda^3 - 1 = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$. Die komplexen Nullstellen des zweiten Faktors sind $-1/2+\sqrt{3/4}i$ und $-1/2 - \sqrt{3/4}i$. Mit Folie 130/131 und 148 erhalten wir daher als Fundamentalsystem der DGL die Funktionen

$$\begin{aligned}&y_1(x) = e^x, y_2(x) = xe^x, y_3(x) = e^{-x/2}\cos(\sqrt{3/4}x),\\ &y_4(x) = xe^{-x/2}\cos(\sqrt{3/4}x), y_5(x) = e^{-x/2}\sin(\sqrt{3/4}x), y_6(x) = xe^{-x/2}\sin(\sqrt{3/4}x) .\end{aligned}$$

Für die zweite DGL erhalten wir das Polynom $P_2(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 9\lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda^3 - 4\lambda^2+9\lambda-10)$. Um Nullstellen des zweiten Faktors zu suchen, benutzen wir die Tatsache, dass jede ganzzahlige Nullstelle das niedrigste Glied teilen muss; es kommen also nur ±1, ±2, ±5 und ±10 in Frage. Durch Einsetzen sieht man, dass 2 eine Nullstelle ist, also $P_2(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$. Der letzte Faktor hat die Nullstellen $1 - 2i$ und $1 + 2i$; wir erhalten das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = 1, y_2(x) = e^{2x}, y_3(x) = e^x \sin(2x), y_4(x) = e^x \cos(2x) .$$

Aufgabe G22 (Autopilot)
Ein Hersteller von Autopiloten für Fahrzeuge beginnt mit folgendem Ansatz für die Steuerung seiner Fahrzeuge: Ausgehend von einer Ideallinie erhält das Fahrzeug fortlaufend die Information, wie weit es in welcher Richtung von dieser abweicht. Wir schreiben dies als reelle Zahl $y(t)$, wobei $y(t) < 0$ eine Abweichung um $|y(t)|$ Meter nach links, und $y(t) > 0$ eine Abweichung nach rechts kennzeichne. Das Fahrzeug steuert nun gegen, und zwar ist die Änderung des Lenkeinschlages proportional zum Fehler. Dies beschreibt die Gleichung

$$y'' = -1/2y .$$

(a) Zeigen Sie, dass alle Funktionen der Form

$$y(t) = c_1 \cos(t/\sqrt{2}) + c_2 \sin(t/\sqrt{2}), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Lösungen dieser Gleichung sind.

(b) Das Fahrzeug sei zum Zeitpunkt $t = 0$ um 0.5m rechts neben der Ideallinie, mit nicht eingeschlagenem Lenkrad (d.h. $y'(0) = 0$). Bestimmen Sie $y(t)$. Ist das Verhalten von $y(t)$ wünschenswert für einen Autopiloten?

Lösung:

(a) Ist $y(t)$ wie oben gegeben, so hat man

$$y'(t) = -c_1/\sqrt{2}\sin(t/\sqrt{2}) + c_2/\sqrt{2}\cos(t/\sqrt{2}) ,$$

und also

$$y''(t) = -c_1/2\cos(t/\sqrt{2}) - c_2/2\sin(t/\sqrt{2}) = -1/2y(t) .$$

(b) Aus der Bedingung $y(0) = 1/2$ erhält man $c_1 = 1/2$, aus der Bedingung $y'(0) = 0$ folgt $c_2 = 0$. Folglich ist

$$y(t) = 1/2 \cos(t/\sqrt{2}) \ .$$

Diese Funktion ist periodisch und hat daher stets die gleiche Amplitude; das Fahrzeug würde also eine andauernde Schlangenlinie um Ideallinie fahren, was sicher nicht wünschenswert ist. Die Lösung einer *gedämpften* Federbewegung würde eine Verbesserung zu diesem ersten Ansatz darstellen.

Hausübung

Aufgabe H17 (Autopilot)
Bearbeiten Sie Aufgabe G22.

Aufgabe H18 (Differentialgleichungssystem)
Man bestimme die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 - y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 - y_3 \,. \end{aligned}$$

Lösung: Wir nutzen Satz 4 (Kapitel 6) auf Folie 127; dafür bestimmen wir zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren: $(2,1,1)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 2, $(-1,1,1)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert -1, und $(0,-1,1)$ zum Wert -2. Folglich ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2x} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe H19 (DGLn n-ter Ordnung)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGLn:

a) $y^{(3)} - y'' = y - y'$.
b) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.
c) $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = 0$.

Lösung: Wir setzen in allen Fällen mit dem charakteristischen Polynom an. Im ersten Falle erhalten wir das Polynom $P_1(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$. Die erste Nullstelle, $\lambda = 1$, errät man leicht, und z.B. durch Polynomdivision erhält man $P_1(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$. Das Polynom hat also eine einfache Nullstelle bei $\lambda = 1$, und je eine Nullstelle bei i und $-i$. Nach Folie 130/131 und 148 ist das System $e^x, \sin(x), \cos(x)$ ein Fundamentalsystem der DGL, also ist die allgemeine Lösung von der Form

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \sin(x) + c_3 \cos(x) \,.$$

Die zweite DGL behandeln wir analog; hier ist das charakteristische Polynom

$$P_2(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2;$$

hier ist $\lambda = 1$ eine zweifache, $\lambda = 2$ eine einfache Nullstelle. Nach Folie 130/131 und 148 ist also e^x, xe^x, e^{2x} ein Fundamentalsystem und

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{2x}$$

die allgemeine Lösung. Die dritte Gleichung schließlich liefert

$$P_3(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$$

und hat nach Folie 130/131 und 148 die Funktionen $1, x, e^x, xe^x$ (man beachte $e^{0 \cdot x} = 1$!) als Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung ist hier

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x \,.$$

Aufgabe H20 (Reduktion der Ordnung)

Bestimmen Sie die Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= 10x_1 + 4x_2 \\ \ddot{x}_2 &= 9x_1 + 10x_2 \end{aligned}$$

mittels Aufstellung eines Systems erster Ordnung und Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren.

Hinweis: Um den Rechenaufwand bei der Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren geringer zu halten, dürfen Sie gerne auch einen Rechner zur Hilfe nehmen.

Lösung: Wir definieren $x_3 := \dot{x_1}$, $x_4 := \dot{x_2}$. Dann haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Nun finden sich hierzu folgende Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } 4\,,$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } 2\,,$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } -4\,,$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } -2\,.$$

Die allgemeine Lösung hat daher die Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 e^{4x} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + C_3 e^{-4x} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \\ -12 \end{pmatrix} . C_4 e^{-2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2(C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-4x} + C_4 e^{-2x})\,, \\ x_2(t) &= 3(C_1 e^{4x} - C_2 e^{2x} + C_3 e^{-4x} - C_4 e^{-2x})\,. \end{aligned}$$