Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. Lang
Dipl.-Math. C. Schönberger
Dipl.-Math. L. Kamenski

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/08
16. November 2007

5. Übungsblatt zur „Mathematik III für MB/MPE, LaB/WFM, VI, WI/MB“

Gruppenübung

Aufgabe G15 (Zum warm werden)

Zeigen Sie, dass die Monomfunktionen $y_i(x) = x^i$ für $i = 0, 1, 2, 3$ linear unabhängig sind.

Lösung: Wir wenden Satz an (Folie 101) und bestimmen die Wronskische Matrix...

$$W(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Nun bestimmen wir die Determinante von W:

$$\det(W(x)) = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 \neq 0$$

Somit sind die Monomfunktionen $y_0, \ldots, y_3$ linear unabhängig.

Aufgabe G16 (Fundamentalsystem)

Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung $L(y) = 12x$ für $x > 0$ mit

$$L(y) := -3y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $y_1(x) = 4x$ und $y_2(x) = \frac{1}{x}$ ein Fundamentalsystem zu $L(y) = 0$ bilden.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems mit der Methode der Variation der Konstanten.

Lösung:

a) Zunächst ist zu zeigen, dass y_1 und y_2 die Gleichung $L(y) = 0$ lösen.

$$y_1(x) = 4x \qquad y_1'(x) = 4 \qquad y_1''(x) = 0$$

$$L(y_1) = 0 - \frac{3}{x} \cdot 4 + \frac{3}{x^2} \cdot 4x = 0$$

und

$$y_2(x) = \frac{1}{x} \qquad y_2'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad y_2''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$L(y_2) = -\frac{6}{x^3} + \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = 0$$

Nun ist die lineare Unabhängigkeit von y_1 und y_2 zu zeigen. Diese liegt vor, falls $\det(W(x)) \neq 0$ für alle $x > 0$ gilt.

$$W(x) = \begin{pmatrix} 4x & \frac{1}{x} \\ 4 & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(W(x)) = -\frac{4x}{x^2} - \frac{4}{x} = -\frac{8}{x} \neq 0$$

für $x > 0$. Also bilden y_1 und y_2 nach Satz 4 (Folie 108) (Skript) ein Fundamentalsystem zu $L(y) = 0$.

b) Nach Skript/Buch ist das folgende Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 4x & \frac{1}{x} \\ 4 & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{12x}{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4x \end{pmatrix}$$

d.h. durch Umformung

$$\begin{pmatrix} 4x & \frac{1}{x} \\ 0 & \frac{2}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4x^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{x} \cdot v_2' = 4x^2 \quad \Rightarrow \quad v_2' = 2x^3 \quad \Rightarrow \quad v_2(x) = \frac{1}{2}x^4$$

$$4x \cdot v_1' + \frac{1}{x} \cdot 2x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1' = -\frac{2x^2}{4x} = -\frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad v_1(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems lautet

$$\begin{aligned} y_0(x) &= v_1(x) \cdot y_1(x) + v_2(x) \cdot y_2(x) \\ &= -\frac{1}{4}x^2 \cdot 4x + \frac{1}{2}x^4 \cdot \frac{1}{x} = -x^3 + \frac{1}{2}x^3 = -\frac{1}{2}x^3 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems lautet:

$$y(x) = y_H(x) + y_0(x) = 4\,c_1\,x + c_2\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,x^3, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe G17 (Variationsdifferentialgleichung)

Im folgenden bezeichne $(\cdot)'$ die Ableitung nach x und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}$ die Ableitung nach dem Parameter $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = a\,y\,, \qquad y(0) = 1.$$

a) Bestimmen Sie eine Lösung y des Anfangswertproblems in Abhängigkeit von a, d.h. $y(x;a)$.

b) Berechnen Sie nun die Ableitung dieser Lösung nach dem Parameter a.

c) Lösen Sie nun die zugehörige Variationsdifferentialgleichung für $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}(y(x;a))$ mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y(0;a) = 0$ und überprüfen Sie, dass Sie die gleiche Lösung wie in b) erhalten.
Hinweis: Seite 79 der Vorlesungsfolien, Variation der Konstanten, für $y(x;a)$ ist hier die Lösung aus a) einzusetzen.

Lösung:

a) Durch Trennung der Veränderlichen berechnet man $y(x;a) = \exp(a\,x)$.

b) Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y(x) = x\,\exp(a\,x) = x\,y(x)$$

c) Die zugehörige Variationsdifferentialgleichung lässt sich wie folgt schreiben:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y\right)' = a\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y\right) + y\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y(0) = 0\,.$$

Wir setzen nun $z := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y$ und erhalten die folgende DGL:

$$z' = a\,z + y\,, \qquad z(0) = 0\,.$$

Die Methode der Variation der Konstanten liefert nun

$$z(x) = c(x)\exp(a\,x)\,,$$

und somit

$$z'(x) = c(x)\,a\,\exp(a\,x) + c'(x)\,\exp(a\,x)\,.$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$\begin{aligned} c(x)\,a\exp(a\,x) + c'(x)\exp(a\,x) &= a\,c(x)\,\exp(a\,x) + y \\ \Leftrightarrow c'(x)\exp(a\,x) &= y \end{aligned}$$

Mit $y(x) = \exp(a\,x)$ folgt nun dass $c'(x) = 1$, d.h. $c(x) = x + c$. Mit der Anfangsbedingung erhält man nun $(0 + c)\exp(a \cdot 0) = 0$, und somit $c = 0$. Dann gilt

$$z(x) = x\exp(a\,x)$$

was nun tatsächlich dieselbe Lösung wie in b) ist.

Aufgabe G18 (Potenzreihenansatz)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + (1-x)y - 1, \quad y(0) = 1$$

für $-1 < x < 1$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

a) Berechnen Sie die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_5$ der Potenzreihe.

b) Leiten Sie aus a) eine Vermutung bezüglich der Werte der Koeffizienten a_n für $n \in \mathbb{N}_0$ ab. Wie lautet die Lösung, wenn Ihre Vermutung richtig ist? Machen Sie die Probe.

Lösung:

a) Wir verwenden den *Potenzreihenansatz*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x_3 x^3 + \ldots,$$

wobei

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3x_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung folgt

$$\begin{aligned} &(y(x))^2 + (1-x)\cdot y(x) - 1 \\ &= a_0^2 + 2a_0a_1x + (2a_0a_2 + a_1^2)x^2 + (2a_0a_3 + 2a_1a_2)x^3 + (2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2)x^4 + \ldots \\ &+ (1-x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) - 1 \\ &= (a_0^2 + a_0 - 1) + (2a_0a_1 + a_1 - a_0)x + (2a_0a_2 + a_1^2 + a_2 - a_1)x^2 \\ &+ (2a_0a_3 + 2a_1a_2 + a_3 - a_2)x^3 + (2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 + a_4 - a_3)x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ergibt sich

$$a_0 = 1$$

und durch einen Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{array}{rll} 1 & : \quad a_1 = a_0^2 + a_0 - 1 & \Rightarrow \quad a_1 = 1 \\ x & : \; 2a_2 = 2a_0a_1 + a_1 - a_0 & \Rightarrow \quad a_2 = 1 \\ x^2 & : \; 3a_3 = 2a_0a_2 + a_1^2 + a_2 - a_1 & \Rightarrow \quad a_3 = 1 \\ x^3 & : \; 4a_4 = 2a_0a_3 + 2a_1a_2 + a_3 - a_2 & \Rightarrow \quad a_4 = 1 \\ x^4 & : \; 5a_5 = 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 + a_4 - a_3 & \Rightarrow \quad a_5 = 1. \end{array}$$

b) Aufgrund der Ergebnisse des Aufgabenteils a) können wir vermuten, dass

$$a_n = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

In diesem Fall wäre

$$y(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu = \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1.$$

Wir machen die *Probe*. Mit

$$y'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

folgt

$$y^2(x) + (1-x) \cdot y(x) - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} + (1-x) \cdot \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1}{(1-x)^2} = y'(x)$$

und

$$y(0) = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Damit ist

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

Hausübung

Aufgabe H14 (Lineare Unabhängigkeit)

Welche der folgenden Funktionensysteme sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

a) $y_1(x) = x, \quad y_2(x) = e^x, \quad y_3(x) = \sin x$

b) $y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = 2\,\sin x, \quad y_3(x) = 3x^2 - \sin x$

☐ a), ☐ b), ☐ a) und b), ☐ keines von beiden.

Lösung: Für den ersten Satz von Funktionen stellen wir zunächst die Wronski-Matrix auf. Sie lautet:

$$W = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & e^x & \sin x \\ 1 & e^x & \cos x \\ 0 & e^x & -\sin x \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Wronski-Matrix ist:

$$detW = e^x \cdot \big((2-x)\cdot \sin x - x \cdot \cos x\big)$$

Da sie nicht identisch verschwindet, ist das System linear unabhängig. Für den zweiten Satz sehen wir direkt dass

$$y_3 = 3y_1 - (1/2)y_2$$

Also ist y_3 linear abhängig von y_1, y_2.
Die Lösung lautet demnach

☒ a), ☐ b), ☐ a) und b), ☐ keines von beiden.

Aufgabe H15 (Parameter)

Im folgenden bezeichne $(\cdot)'$ die Ableitung nach x und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}$ die Ableitung nach dem Parameter $a \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = a\,x\,y\,, \qquad y(x_0) = y_0.$$

a) Bestimmen Sie eine Lösung y des Anfangswertproblems in Abhängigkeit von a, d.h. $y(x;a)$.

b) Berechnen Sie nun die Ableitung dieser Lösung nach dem Parameter a.

c) Lösen Sie nun die zugehörige Variationsdifferentialgleichung für $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y$ mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y(x_0;a) = 0$ mittels der Methode der Variation der Konstanten und überprüfen Sie, dass die Lösung mit der Lösung in b) übereinstimmt.

Lösung:

a) Es gilt: $y(x) = k(a)\cdot \exp(\frac{1}{2}x^2 a)$ mit $k(a) := \frac{y_0}{\exp(\frac{1}{2}x_0^2 a)}$.

b) Man erhält:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y(x) &= k(a)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\exp\left(\frac{1}{2}x^2 a\right)\right) + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}k(a)\right)\exp\left(\frac{1}{2}x^2 a\right) \\
&= k(a)\frac{1}{2}x^2\exp\left(\frac{1}{2}x^2 a\right) - \frac{1}{2}x_0^2 k(a)\exp\left(\frac{1}{2}x^2 a\right) \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)\,k(a)\exp\left(\frac{1}{2}x^2 a\right) \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)\,k(a)\,y(x)
\end{aligned}$$

c) Die zugehörige Variationsgleichung lässt sich wie folgt schreiben:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y\right)' = a\,x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y\right) + y\,x\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y(x_0) = 0\,.$$

Mit $z := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}y$ ergibt sich die folgende DGL:

$$z' = a\,x\,z + y\,x\,, \qquad z(x_0) = 0\,.$$

Methode der Variation der Konstanten liefert:

$$z(x) = c(x)\,k(a)\,\exp\left(\frac{1}{2}x^2a\right)\,,$$

und somit

$$z'(x) = c(x)\,k(a)\,a\,x\,\exp\left(\frac{1}{2}x^2a\right) + c'(x)\,k(a)\,\exp\left(\frac{1}{2}x^2a\right)\,.$$

Einsetzen in die DGL liefert dann

$$c(x)\,k(a)\,a\,x\,\exp\left(\frac{1}{2}x^2a\right) + c'(x)\,k(a)\,\exp\left(\frac{1}{2}x^2a\right) = a\,x\,c(x)\,k(a)\,\exp\left(\frac{1}{2}x^2a\right) + x\,y\,,$$

d.h.

$$c'(x)\,k(a)\,\exp\left(\frac{1}{2}x^2a\right) = x\,y\,.$$

Da $y(x) = k(a)\,\exp\left(\frac{1}{2}x^2a\right)$ gilt, folgt $c'(x) = x$, d.h. $c(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$. Die Anfangsbedingung $z(x_0) = 0$ liefert nun

$$\left(\frac{1}{2}x_0^2 + c\right)\,k(a)\,\exp(\frac{1}{2}a\cdot x_0^2) = 0\,,$$

also gilt $c = -\frac{1}{2}x_0^2$. Hiermit gilt

$$z(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)\,k(a)\,\exp\left(\frac{1}{2}x^2a\right)\,,$$

was tatsächlich dieselbe Lösung wie in b) ist.

Aufgabe H16 (Fundamentalsystem)

Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung 3. Ordnung

$$L(y) = \frac{\ln(x)}{x} \quad (x > 0)$$

mit

$$L(y) := x^2y''' - 2y'.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x^3$ und $y_3(x) = \ln(x)$ ein Fundamentalsystem zu $L(y) = 0$ bilden.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems mit der Methode der Variation der Konstanten.
Hinweis: Es gilt $\int \frac{\ln(x)}{x^4}\,dx = -\frac{\ln(x)}{3x^3} - \frac{1}{9x^3}$.

Lösung:

a) Um zu zeigen, dass die Funktionen

$$y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x^3 \qquad \text{und} \qquad y_3(x) = \ln(x)$$

ein Fundamentalsystem zu

$$L(y) = 0$$

bilden, müssen wir nachweisen, dass

i) y_1, y_2 und y_3 die homogene Differentialgleichung $L(y) = 0$ lösen
ii) y_1, y_2 und y_3 linear unabhängig sind.

zu i): Wegen

$$y_1(x) = 1,\ y_1'(x) = 0,\ y_1''(x) = 0 \quad \text{und} \quad y_1'''(x) = 0$$

folgt

$$L(y_1) = x^2 \cdot y_1'''(x) - 2 \cdot y_1'(x) = x^2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

und somit ist y_1 eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $L(y) = 0$.

Mit

$$y_2(x) = x^3,\ y_2'(x) = 3x^2,\ y_2''(x) = 6x \quad \text{und} \quad y_2'''(x) = 6$$

erhalten wir

$$L(y_2) = x^2 \cdot y_2'''(x) - 2 \cdot y_2'(x) = 6x^2 - 6x^2 = 0,$$

weshalb auch y_2 eine Lösung von $L(y) = 0$ ist.

Schließlich ergibt sich mit

$$y_3(x) = \ln(x),\ y_3'(x) = \frac{1}{x},\ y_3''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{und} \quad y_3'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

noch

$$L(y_3) = x^2 \cdot y_3'''(x) - 2 \cdot y_3'(x) = x^2 \cdot \frac{2}{x^3} - 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x} = 0$$

und damit bildet auch y_3 eine Lösung von $L(y) = 0$.

zu ii): Wegen

$$\det W(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & x^3 & \ln(x) \\ 0 & 3x^2 & \frac{1}{x} \\ 0 & 6x & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} = 3x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 6x \cdot \frac{1}{x} = -3 - 6 = -9 \neq 0$$

sind y_1, y_2 und y_3 nach Satz 5.1 im Skript *linear unabhängig.*

Somit bildet $\{y_1, y_2, y_3\}$ ein *Fundamentalsystem* zu $L(y) = 0$.

b) Gemäß der im Skript beschriebenen Vorgehensweise verwenden wir den *Ansatz*

$$\begin{aligned} y_0(x) &= v_1(x) \cdot y_1(x) + v_2(x) \cdot y_2(x) + v_3(x) \cdot y_3(x) \\ &= v_1(x) + v_2(x) \cdot x^3 + v_3(x) \cdot \ln(x). \end{aligned}$$

Dieser führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & x^3 & \ln(x) \\ 0 & 3x^2 & \frac{1}{x} \\ 0 & 6x & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \\ v_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\ln(x)}{x^3} \end{pmatrix},$$

welches zu dem System

$$\begin{pmatrix} 1 & x^3 & \ln(x) \\ 0 & 3x^2 & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1'(x) \\ v_2'(x) \\ v_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\ln(x)}{x^2} \end{pmatrix}$$

äquivalent ist. Wir erhalten nun

$$v_3'(x) = -\frac{\ln(x)}{3x}, \; v_2'(x) = \frac{\ln(x)}{9x^4} \quad \text{und} \quad v_1'(x) = -\frac{\ln(x)}{9x} + \frac{(\ln(x))^2}{3x}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \int -\frac{\ln(x)}{9x} + \frac{(\ln(x))^2}{3x}\, dx = -\frac{1}{18}(\ln(x))^2 + \frac{(\ln(x))^3}{9}, \\ v_2(x) &= \int \frac{\ln(x)}{9x^4}\, dx = -\frac{\ln(x)}{27x^3} - \frac{1}{81x^3}, \\ v_3(x) &= \int -\frac{\ln(x)}{3x}\, dx = -\frac{(\ln(x))^2}{6}. \end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz ergibt

$$\begin{aligned} y_0(x) &= -\frac{1}{18}(\ln(x))^2 + \frac{(\ln(x))^3}{9} - \frac{\ln(x)}{27} - \frac{1}{81} - \frac{(\ln(x))^3}{6} \\ &= -\frac{1}{18}\left[\ln(x))^2 + (\ln(x))^3\right] - \frac{1}{81}\left[1 + 3\ln(x)\right]. \end{aligned}$$

Die allgemeine *Lösung* des inhomogenen Problems lautet nun

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_0(x) \\ &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot x^3 + c_3 \cdot \ln(x) - \frac{1}{18}\left[\ln(x))^2 + (\ln(x))^3\right] - \frac{1}{81}\left[1 + 3\ln(x)\right], \end{aligned}$$

wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.